

断層映像法の基礎 第2回 デジタル画像と離散フーリエ変換

篠原 広行

昭和大学藤が丘病院放射線科

はじめに

第1回では距離とともに変化する画像の濃淡を cosine関数やsine関数により表すこと、すなわちフーリエ級数やフーリエ変換について説明した。フーリエ変換では座標の単位がcycle/画素あるいは cycle/cm であって、単位長さあたりに含まれる波の数となる。フーリエ変換は画像処理において威力を発揮するが、コンピュータで扱う画像は連続的なものではなく画素単位に数値が与えられる離散的な画像である。ここで、離散化とは連続関数を標本化により不連続のデータで表すことである。このような離散画像(デジタル画像)のフーリエ変換は、連続関数のフーリエ変換とは別に離散フーリエ変換により行われる。本稿では、はじめに、デジタル画像に関する用語について述べる。つぎに、1次元離散フーリエ変換の計算例を紹介する。そこに出てくる位相因子(phase factor)は、MRの空間エンコードを理解するのに役立つ。最後に投影定理について述べる。

1. デジタル画像に関する用語
2. 離散フーリエ変換
3. 投影定理

1. デジタル画像

胸部X線写真は微小な銀粒子がX線によって黒化された像であり、その位置や濃度の情報は連像的に変化する。このような画像をアナログ画像という。以下では、便宜的に核医学のガンマカメラを例として述べる。ガンマカメラの検出器に入射した光子のx、y座標信号も連続的に変化するアナログ情報であるが、デジタル画像はそれを図1(a)のように検出器面を格子状の行列(マトリクス)に分けて記録する。図ではNaI検出器面を黒とし、光子が入射し発光した位置を白丸で表している。マトリクスの各領域を画素あるいはピクセル(pixel)といい、その座標を行をi、列をjとして(i, j)のように表す。座標が(2, 2)の画素には光子が4個、(2, 3)の画素には光子が5個入射し、これら9個の光子の入射位置は(a)では異なっている。デジタル画像はそれら入射位置の違いを無視し、(b)のように一つの座標で代表させそれぞれの画素に光子が4個と5個入射したと記録する。その結果、デジタル画像の座標は、画素幅の分だけ曖昧さをもつので、光子の数に応じ濃淡を割り当て表示すると(c)のようなモザイク状になる(実際のデジタル画像は、モザイクが

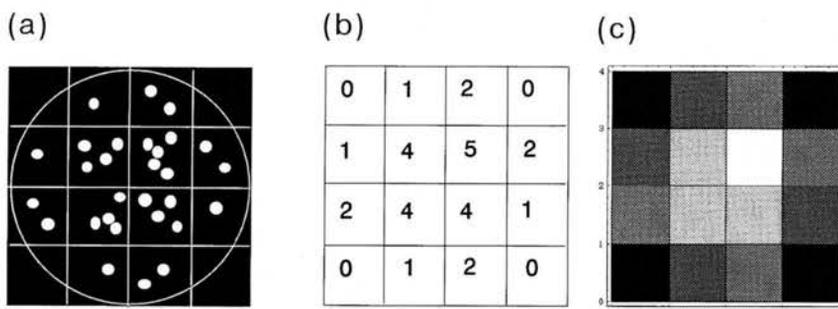


図1 アナログ画像とデジタル画像

- (a) アナログ画像(白丸は検出器面へ入射する光子を表す)
- (b) 検出器面を4×4マトリクスに分けたときの各画素内の光子数
- (c) (b)より得られる画素内の濃度が一樣なデジタル画像。

目立たないようにマトリクスの数を大きくする)。

連続した座標を不連続の座標に置き換えることを標本化という。デジタル画像は座標の標本化とともに、濃度(輝度)についても連続した情報を不連続の濃度で置き換えるがこれを量子化という。ガンマカメラは光子を1個々計測するので、それによる像はもともと量子化されている。デジタル画像を得るには、アナログ画像の座標と濃度の情報をできるだけ損なわないように標本化と量子化を行う必要がある。

1) 標本化とナイキスト周波数

検査対象によりガンマカメラのコリメータが選ばれると、入射光子の座標をどのくらい細かく伝えることが可能かが決まる。核医学画像の標本化は収集マトリクスサイズ(64×64、128×128、256×256など)を設定することである。図2はデジタル画像のx軸方向を取り出し濃度変化を見たものである。上段は1番目の画素の濃度が1、2番目の画素は0、3番目の画素が1で、以下同様に変化する。濃度の変化を波と見なし、最初の濃度に戻る画素数から1引いた画素数を1周期とする。この場合は、3画素目で最初の濃度に戻るので2画素で1つの波になる。すなわち、周期2画素の波である。中段は5番目の画素で濃度1に戻るので周期4画素の波、下段は周期8画素の波である。一方、波の特徴を1画素あたりに含まれる波の数(cycle/画素)で分類すると、上段は1画素に0.5だけの波が含まれる。これを周波数0.5cycle/画素というように表す。同様に、中段および下段の波はそれぞれ、周波数0.25 cycle/画素、0.125cycle/画素の波である。x軸方向の周波数と周期をそれぞれu、Tとすれば、両者の関係は以下の式で表される。

$$u = \frac{1}{T} \quad (\text{cycle/画素}) \quad (1)$$

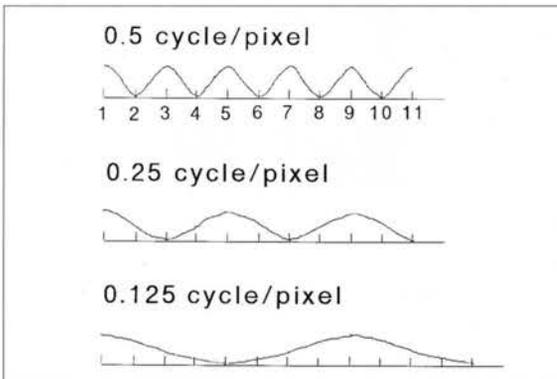


図2 画素単位の周波数

画像に含まれる最高周波数のことをナイキスト周波数といい、デジタル画像の最高周波数は、図2から0.5 cycle/画素である。周波数の単位をcycle/cmで表すには、ガンマカメラの視野と収集マトリクスから1画素が何cmに相当(w cm/画素)するかを求め、以下のように計算する。

$$0.5 \times 1/w \quad (\text{cycle/cm}) \quad (2)$$

例えば、直径41cmの視野のガンマカメラで256×256、128×128、64×64マトリクスのデータ収集を行えば、1画素はそれぞれ0.16、0.32、0.64cmなので、ナイキスト周波数は3.12、1.56、0.78cycle/cmである。

2) 線広がり関数とその伝達関数(MTF)

散乱体がない空気中では、検出器固有の分解能やコリメータの幾何学的な分解能を示す線広がり関数は図3(a)のようなガウス関数(縦軸の値が距離とともに釣り鐘状に変化する)により近似できる。一般に、分解能は線広がり関数h(x)のピークの1/2に相当するx座標間の距離により表され、この距離を半値幅(full width at half maximum : FWHM)という。半値幅で表した検出器の分解能をR_d、コリメータの分解能をR_cとすれば、それらは互いに無関係なので、ガンマカメラの分解能R_sは以下のように表される。

$$R_s^2 = R_d^2 + R_c^2 \quad (3)$$

図3(a)はR_sが0.5cmと1.0cmの場合の線広がり関数を示す。

線広がり関数は横軸が距離、縦軸がカウントの空間領域で表された関数である。それをフーリエ変換により、図2のような周波数の異なる波の集まりに分けることができる。図3(b)は(a)をフーリエ変換したもので、横軸は波の周波数、縦軸はその波の大きさ(振幅)を表す。このような領域を周波数領域という。空間領域の関数が線広がり関数のとき、そのフーリエ変換を伝達関数とよびMTF(modulation transfer function)と表す。MTFは周波数が0cycle/cmの波(周期が無限大、すなわち強度変化がゼロの直線に相当)の振幅を1とし、それを基準にして各周波数の波の振幅を(b)のように表す。ガンマカメラが伝達可能な最高周波数は、MTFがゼロになるところの周波数である。

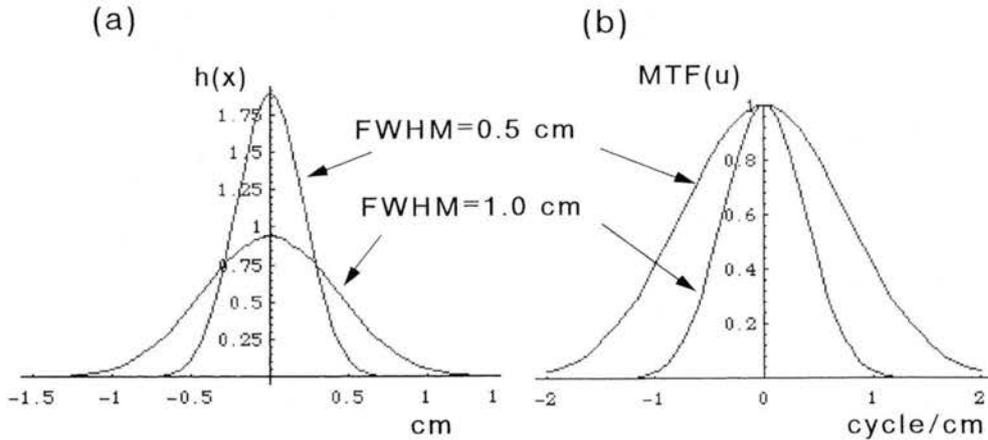


図3 線広がり関数 (a) とその伝達関数 (MTF) (b)

ガンマカメラの半値幅が0.5cmのとき、最高周波数は2.2cycle/cmである。また、その半値幅が1.0cmのとき、伝達する最高周波数は1.2cycle/cmである。半値幅0.5cmは、コリメータから比較的近い距離にある線源の位置でのガンマカメラの分解能を想定している。半値幅1.0cmは、それが中間位置での分解能を想定している。

3) 画素幅とその伝達関数

画素幅をいくつにするかを画像の分解能の面から考えれば、ガンマカメラのMTFをできるだけ低下させないように選ぶ。図1(a)のマトリクスを4×4から5×5、6×6、7×7と順に大きくすれば、画素幅が小さくなり、画素内の近接した光子の座標を識別することができる。このことから、画素幅により伝達可能な周波数が変化することが想像される。これを定量的に表現するには、画素を図4(a)のように幅2a、高さAの矩形関数と考えフーリエ変換する。(b)はその幅の違いにより、画素が含み得る波の周波数とその振幅を表す(図中の0.16cm、0.32cmなどは画素幅2aを示す)。ガンマカメラおよび画素の伝達関数をそれぞれMTF(u)、S(u)とすれば、デジタル画像の分解能は両者の積となり以下のように表される。

$$MTF(u) \times S(u) \tag{4}$$

(4)式の関係画素幅が0.32cmと0.64cmの場合についてそれぞれ(c)、(d)に示す。これより、画素幅0.32

cmはガンマカメラから近い線源に対して分解能の低下をもたらす(図には示さないが、中間距離の線源に対しては分解能の低下を生じない)、画素幅0.64cmはさらに分解能を低下させる。

実際には(c)や(d)をわざわざ作成する必要はなく、ガンマカメラのナイキスト周波数を u_n とすると、必要な画素幅 w は以下のように与えられる。

$$w = \frac{1}{2u_n} \tag{5}$$

(5)式は線源を連続波形と見なしたときそれを離散化するには、線源の最高周波数の2倍の周波数を伝達できる画素幅が必要であることを示す。(5)式の関係を標本化定理という。

4) エリアジング(折り返し)

線源の最高周波数をガンマカメラのナイキスト周波数を u_n と見なし、そのスペクトルが図5(a)の中央のように表されるとする。ここで、スペクトルとは線源に含まれる周波数と振幅の関係を示すもので図2(b)のMTFなどもその例である。(a)には他にスペクトルの複製が2つ描かれているが、これは連続関数を標本化する場合に特有な現象であり、複製は $\pm 1/w$ の周波数に生じる。したがって、 w が(5)式を満たすように選ばれるとスペクトルと複製は $\pm 2u_n$ 離れるので重なりを生じないが、 w をそれより大きく選ぶとスペクトルに重なりを生じる。その結果、複製の高い周波数成分が低い周波数の領域に折り返され(これをエリアジング(折り

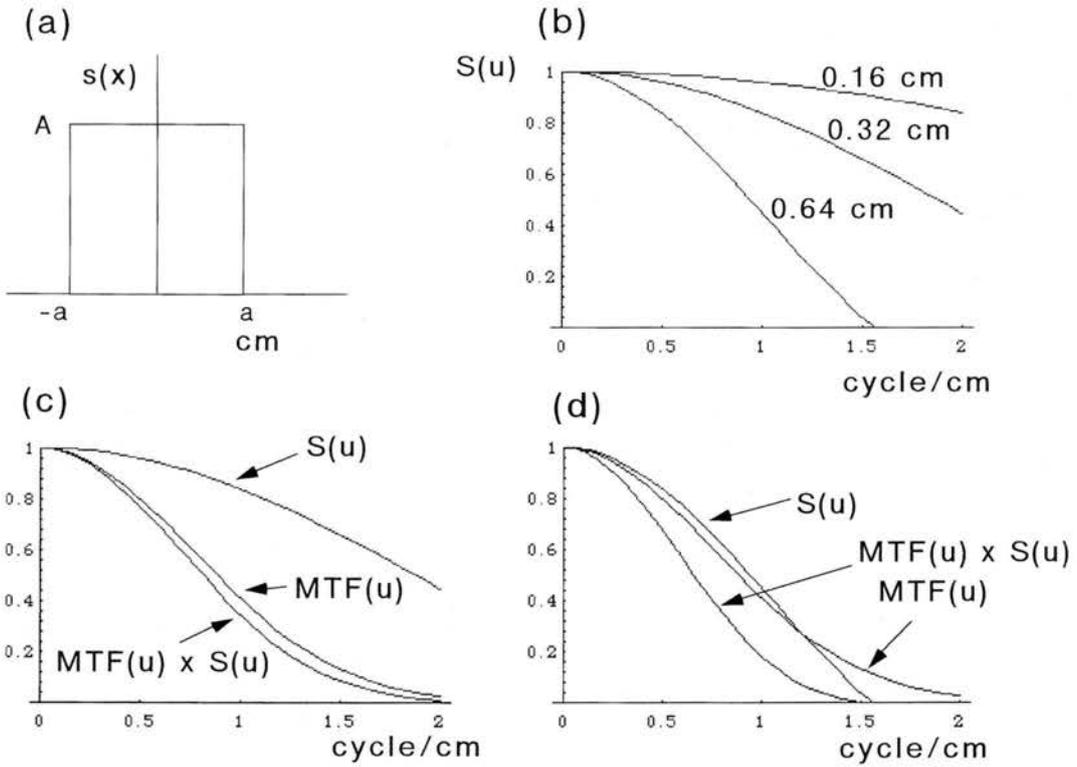


図4 矩形関数 (a)とその伝達関数 (b)、(c) MTF と矩形関数の伝達関数との積 (画素幅 0.32 cmの場合)、(d) MTF と矩形関数の伝達関数との積 (画素幅 0.64 cmの場合)。

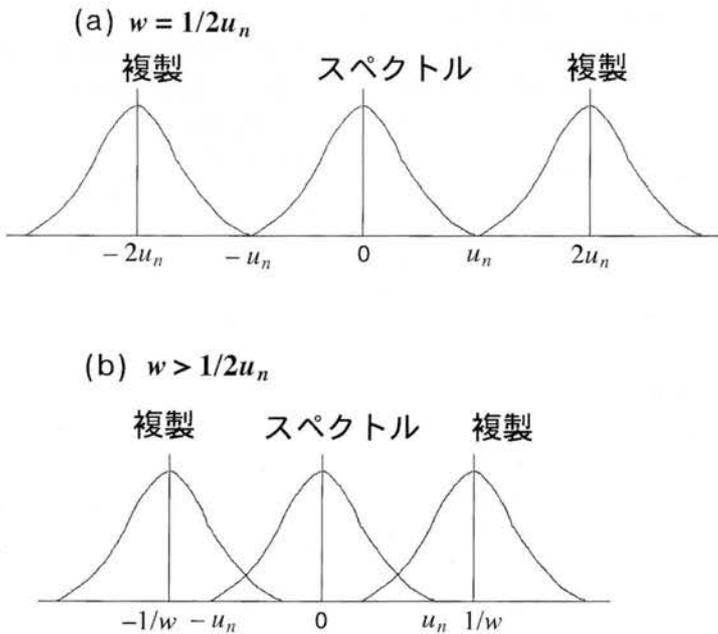


図5 エリアジングがないスペクトル (a)とあるスペクトル (b)

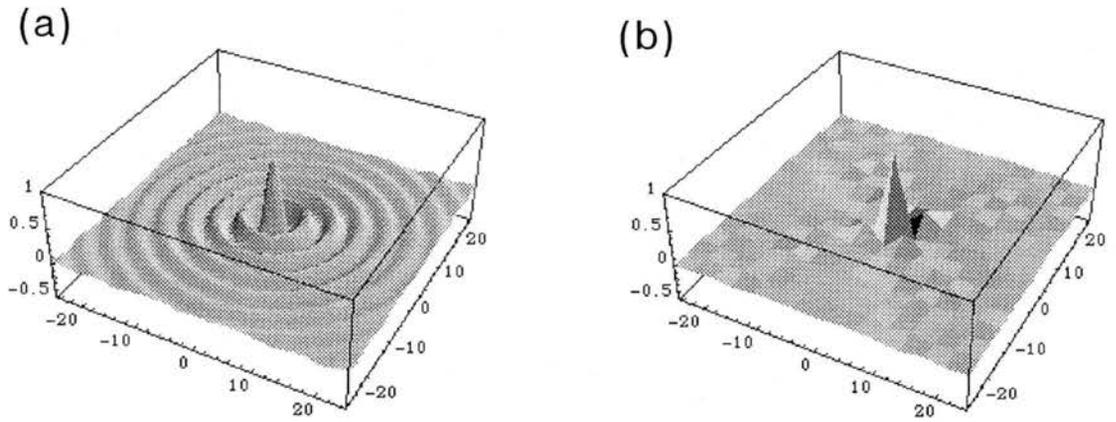


図6 (a) sinc関数で表されるRI分布を十分なマトリクス数によりデジタル化した場合、
(b) 不十分なマトリクス数によるデジタル化。

返し)という)、スペクトルに誤差を生じる。エリアジングの影響を以下の関数について示す(aは定数)。

$$\frac{\sin ax}{ax} \tag{6}$$

この関数はsinc関数とよばれ、画像の内挿による補間の際などに使用される。ここでは、2次元のsinc関数で表されるようなラジオアイソトープの濃度変化を仮定し、それを十分なマトリクス数によりデータ収集する場合とマトリクス数が不十分な場合にどうなるかを示す。図6(a)の3次元プロットはマトリクス数が大きく、エリアジングのない正しい線源の濃度変化を表す。(b)はマトリクス数が小さく、エリアジングにより線源の濃度変化を正しく表していない。デジタル画像ではエリアジングを小さくするように、マトリクス数を決める必要がある。

5) フーリエ変換の計算例

ある関数f(x)に虚数iを含む指数関数を掛け、xについて積分することを以下のように表す。

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx \tag{7}$$

この積分をフーリエ積分といい、パラメータuのあらゆる値に対し存在するときF(u)をフーリエ変換という。f(x)を1次元の画像とすれば x は距離を表す変数でf(x)はその位置での濃度である。フーリエ変換後の F(u)において、uは単位長さあたりに含まれる波

の数(空間周波数)を表しF(u)は波の振幅を表す。F(u)は複素数であって、その実数部をR(u)、虚数部をI(u)とすれば以下のように表される。

$$F(u) = R(u) - iI(u) = |F(u)| e^{-i\theta(u)} \tag{8}$$

F(u)の絶対値を振幅(amplitude)という。複素数の絶対値の定義から、振幅はF(u)の実数部と虚数部それぞれの2乗和の平方根である。ある周波数における振幅は、画像に含まれるその周波数の波の強度を表す。

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2} \tag{9}$$

位相角は以下のように定義される。位相角は画像の形状に関する情報を有している。

$$\theta(u) = \tan^{-1}[I(u)/R(u)]$$

離散フーリエ変換に話しを進める前に、フーリエ変換を図7(a)の矩形関数について計算してみよう。これは第1回、図12(a)の2次元矩形関数のx軸に平行な部分の濃度分布に相当する。また、図4(a)の画素幅を表す矩形関数のs(x)においてa=0.32 cm、A=1としたf(x)が図7(a)である。

$$\begin{aligned} f(x) &= A \quad |x| < a \\ &= \frac{A}{2} \quad x = \pm a \\ &= 0 \quad |x| > a \end{aligned} \tag{10}$$

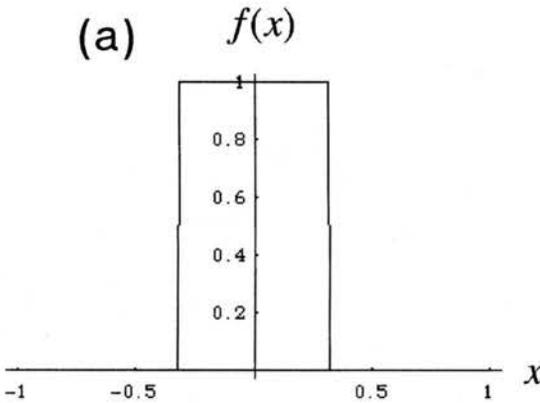


図7 矩形関数とそのフーリエ変換
(10)式において、 $a = 0.32 \text{ cm}$ 、 $A = 1$ とした矩形関数

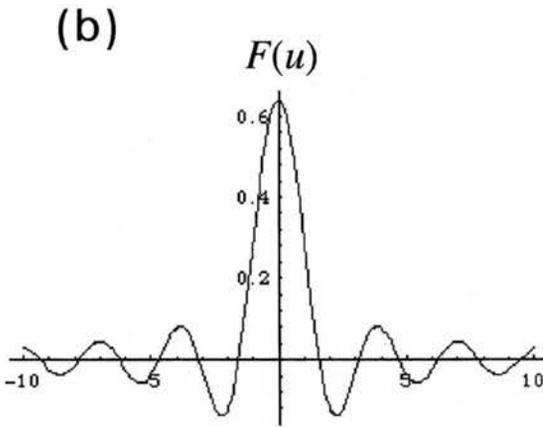


図7 (b)

(a) のフーリエ変換の振幅 $|F(u)|$ を -10 cycle/cm から 10 cycle/cm の範囲について表示

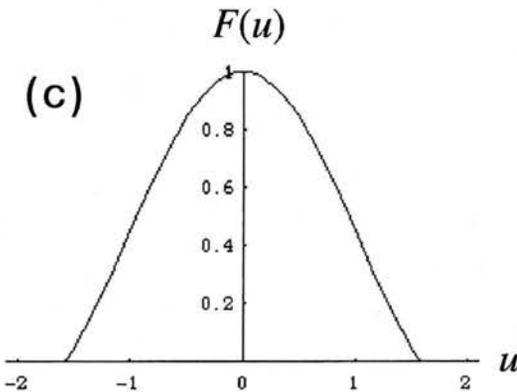


図7 (c)

$|F(u)|$ を -2 cycle/cm から 2 cycle/cm の範囲について表示した場合で、 u が正についての部分は図4 (b) において $2a = 0.64 \text{ cm}$ の $S(u)$ と同じである。

フーリエ変換の積分範囲は $(-\infty, \infty)$ であるが、矩形関数は $(-a, a)$ の範囲でのみ値 A をもちそれ以外ではゼロであるから

$$F(u) = \int_{-a}^a A e^{-i2\pi ux} dx$$

$$= \int_{-a}^a A \cos(2\pi ux) dx - i \int_{-a}^a A \sin(2\pi ux) dx$$

第2項は奇関数のsine関数の積分なのでゼロであり、第1項の実数部の積分のみがゼロでない値をもつ。cosine関数の積分はsine関数であるから、

$$F(u) = \left[\frac{A \sin(2\pi ux)}{2\pi u} \right]_{-a}^a = 2Aa \frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au} \quad (11)$$

$F(u)$ は図7 (b) に示すような関数である。これは第1回、図12 (b) の2次元フーリエ変換の u 軸上の振幅に相当する。また、(11) 式で $a = 0.32 \text{ cm}$ について計算した $F(u)$ のうち、 $u = 0$ のときの $F(0)$ を1に規格化し u の正の部分のみを示した (c) が図4 (b) の画素幅 0.64 cm の伝達関数 $S(u)$ である。

2. 離散フーリエ変換

離散フーリエ変換のことを discrete Fourier transform といい、DFT と表すことが多い。N 個のデータ数列

$$\{f(x)\} \equiv \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\} \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

に対して、離散フーリエ変換を次のように定義する。

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N} \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

ここで、

$$W = e^{-i2\pi/N} \quad (13)$$

と置くと、指数関数の性質から

$$e^{-ab} = (e^{-a})^b$$

なので、虚数を含む指数関数の部分は W を用いて

$$e^{-i2\pi ux/N} = (e^{-i2\pi/N})^{ux} = W^{ux} \quad (14)$$

のように表される。すると、離散フーリエ変換を以下のように表すこともできる。

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W^{ux} \quad u=0,1,2,\dots,N-1 \quad (15)$$

このWのことを位相因子という。オイラーの公式を用いるとWは、

$$W = e^{-i2\pi/N} = \cos \frac{2\pi}{N} - i \sin \frac{2\pi}{N}$$

のように表される。絶対値が1の複素数を $x+iy$ および $x-iy$ 、それらがx軸となす角度を θ および $-\theta$ とする。 $x = \cos \theta$ 、 $y = \sin \theta$ であるから、それらは図8のような半径1の単位円上で表される。位相因子Wの絶対値も1であるから、 W^{ux} においてuを固定しxをデータの個数Nについて0, 1, 2, ..., N-1と変化させると、それらは図9(a)の複素平面の単位円上に並ぶ。Wは大きさと方向をもっているので、複素数の代わりにベクトルといっても同じである。以下では、Wの図を描くことにより離散フーリエ変換を実際に計算してみる。

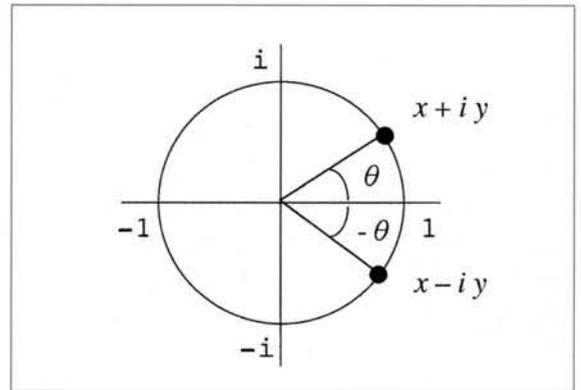


図8 複素平面

$u=1$ のとき W^{ux} は2行目のようになる。 $u=2$ のとき W^{ux} の各ベクトルは、3行目のように $u=1$ のときの位置から時計回りに45度回転する。 $u=3$ のとき W^{ux} の各ベクトルは、4行目のように $u=1$ のときの位置から時計回りに90度回転する。このようにWを回転させながら $f(x)$ と掛け算し、その総和を計算することが(15)式の意味である。

本稿はMathematicaという数式ソフトウェアを使用し執筆しているが、Mathematicaでは離散フーリエ変換を

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N} \quad u=0,1,2,\dots,N-1 \quad (16)$$

のように定義している。規格化因子がNになるか \sqrt{N} になるかの違いのみで、本質的には同じである。以下、具体的に計算過程を示す。

$u=0$ の場合はxの値に拘わらず $W^{0x}=1$ であるから、(16)式は

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{8}} \{(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + 1 + 1\} = 0$$

$u=1$ の場合は W^{ux} において $u=1$ と置き、xを0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7と変えて

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{(-1) + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^1 + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 \\ &\quad + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5 + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7\} \\ &= -0.707107 + 1.70711i \end{aligned}$$

複素数のべき乗は2乗の計算をもとに、以下のように計算される。

1) 離散フーリエ変換の計算例

8個のデータ数列

$$\{f(x)\} = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}$$

について、離散フーリエ変換を求めよう。

$$W = e^{-i(2\pi/N)}$$

において、 $N=8$ と置くと

$$W = e^{-i(2\pi/8)} = \cos \frac{2\pi}{8} - i \sin \frac{2\pi}{8} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

(14)式の W^{ux} において $u=1$ と置くと、 $x=0, x=1, x=2, x=3, x=4, x=5, x=6, x=7$ の8個の W^{ux} は単位円上に45度づつ離れて図9(b)のように並ぶ。このように配置された W^{ux} について、uを $u=0, u=1, u=2, u=3, u=4, u=5, u=6, u=7$ とxのデータの個数Nと同じく8個のuについて計算する。

$u=0$ のとき W^{ux} はすべて1であるから、複素平面上で図10の1行目のように表される。この場合の(15)式は、 $f(x)$ について単に総和を計算するだけである。

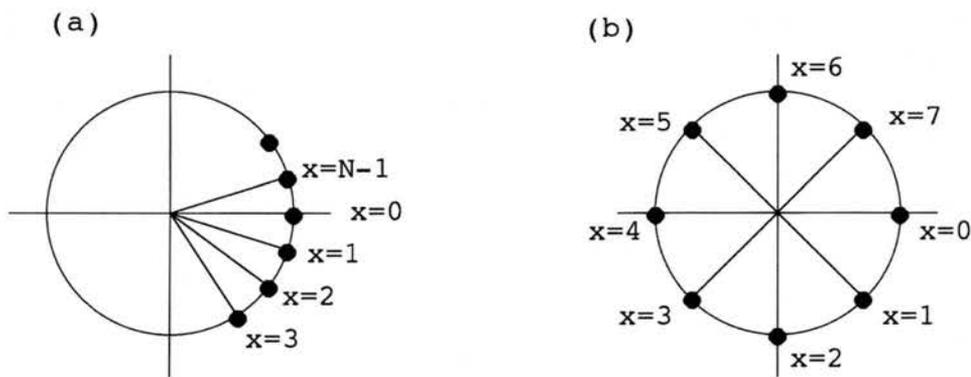


図9 (a) 複素平面上の位相因子 (データ数N)、(b) 複素平面上の位相因子 (N=8の場合)。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1-2i-1}{2}\right) = -i \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -i \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -1 \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = i \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = i \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = 1 \end{aligned}$$

u=2の場合は W^{ux} において $u=2$ と置き、 x を0、1、2、3、4、5、6、7と変えて

$$\begin{aligned} F(2) &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} \{ (-1) + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 + (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 \\ &\quad + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8 + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{10} + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{12} + 1 \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{14} \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以下、同様にするとN個のデータ数列から別のN個のデータ数列が得られる。

$$\{F(u)\} = \{0, -0.707107+1.70711i, 0, -0.707107+0.292893i, 0, -0.707107-0.292893i, 0, -0.707107-1.70711i\}$$

はじめの $f(x)$ は実数であったが、変換してできた $F(u)$ は一般に複素数となる。図11に $f(x)$ と $F(u)$ の実数部 $R(u)$ と虚数部 $I(u)$ を示す。ここで、 $R(u)$ や $I(u)$ の横座標は(16)式の u の値ではなく $F(u)$ のデータの番号1~8を表す。したがって、横座標の1は $u=1$ という周

波数ではなく u 座標の1番目のデータであることを示す。位相因子の中味をcosine関数とsine関数に分け、 $u=0$ について(16)式の計算過程を示すと図12のようになる(図12~14の横座標は x の値ではなく $f(x)$ のデータの番号1~8を表す)。図13は $u=1$ 、図14は $u=2$ の場合であり、他の u についても $f(x)$ にcosine関数とsine関数のそれぞれを掛け算しその総和を計算する。つぎに、ある u について実数部の総和と i を掛けた虚数部の総和を足し算したものが複素数 $F(u)$ である。図12~14では、図10の各ベクトルの x 座標が $\cos(2\pi ux)$ 、 y 座標が $\sin(2\pi ux)$ になる。

データ数Nの離散フーリエ変換 $F(u)$ では $u=N/2$ がナイキスト周波数に相当し、1番目の変換データは周波数0の直流成分となる。コンピュータで計算する場合には配列を利用するので、例えば $N=8$ のとき $u=N/2$ は配列の順番からいくと $u=0$ が1番目の配列に入るので5番目となる。図11の $R(u)$ はナイキスト周波数を中心に $u=1 \sim N/2-1$ (データの順番でいくと2、3、4)は正の周波数、 $u=N/2+1 \sim N-1$ (データの順番でいくと6、7、8)は負の周波数成分を表す。そして、実数部は正と負の周波数において値が等しく左右対称である。一方、 $I(u)$ はナイキスト周波数を中心に正と負の周波数において絶対値が等しく符号が逆になっている。このような対称性は2次元離散フーリエ変換にも現れ、MRの画像再構成はこの性質を利用している。

2) 離散フーリエ逆変換

$F(u)$ から逆に $f(x)$ を求めることを離散フーリエ逆変換といい、以下のように与えられる。

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N} \quad x=0,1,2,\dots,N-1 \quad (17)$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) W^{-ux} \quad x=0,1,2,\dots,N-1 \quad (18)$$

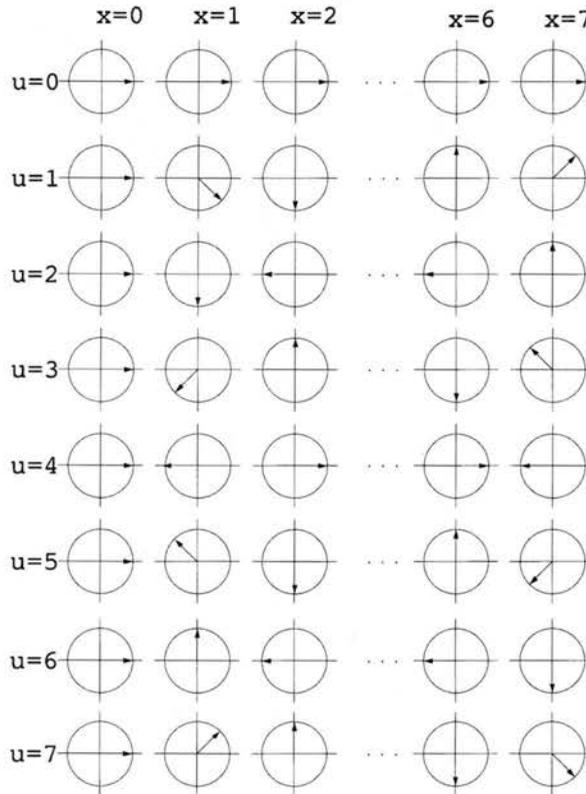


図10 周波数と位相因子の関係 (N = 8 の場合)

指数関数の部分が $-i$ ではなく、 i になっていることに注意しよう。Mathematica では離散フーリエ逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N} \quad x=0,1,2,\dots,N-1 \quad (19)$$

のように定義される。(19) 式により $F(u)$ から $f(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{ 0 + (-0.707107 + 1.70711i) + 0 \\ &\quad + (-0.707107 + 0.292893i) + 0 \\ &\quad + (-0.707107 - 0.292893i) + 0 \\ &\quad + (-0.707107 - 1.70711i) \} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{ 0 + (-0.707107 + 1.70711i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^1 + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\quad + (-0.707107 + 0.292893i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 \\ &\quad + (-0.707107 - 0.292893i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5 + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 \\ &\quad + (-0.707107 - 1.70711i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^7 \} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \{ 0 + (-0.707107 + 1.70711i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 \\ &\quad + (-0.707107 + 0.292893i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 \\ &\quad + (-0.707107 - 0.292893i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10} + 0 \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{12} \\ &\quad + (-0.707107 - 1.70711i) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{14} \} \\ &= -1 \end{aligned}$$

他の $f(x)$ についても同様に求められ、 $F(u)$ の離散フーリエ逆変換によりもとの関数に戻ることがわかる。

画像処理では2次元フーリエ変換が多く用いられる。2次元フーリエ変換の場合、 y 方向については何もしないではじめに x 方向についてフーリエ変換する。この結果、 x 座標の単位は周波数、 y 座標は距離のままである。つぎにそれらを y 方向についてフーリエ変換すると、 x および y 座標は両方とも周波数となる。つまり、2次元フーリエ変換の実際の計算は1次元フーリエ変換を2回繰り返せばよい。

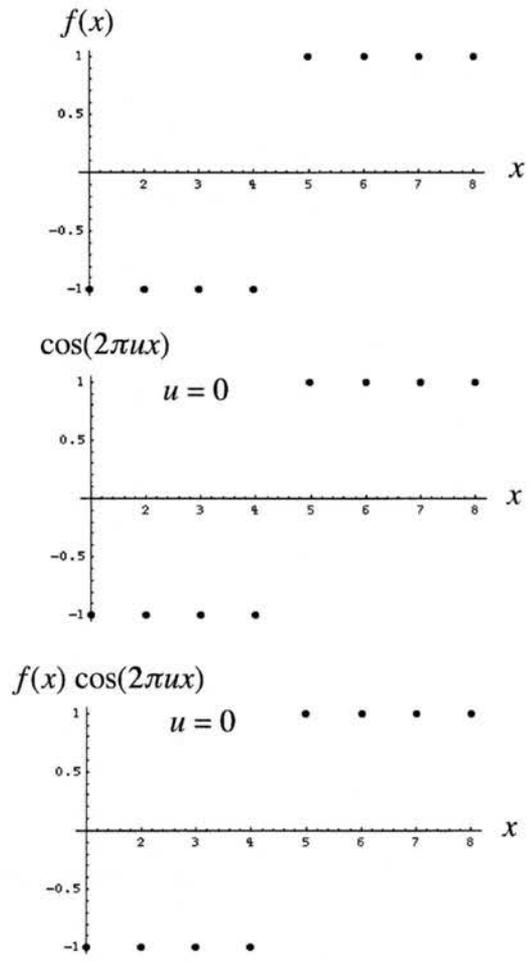
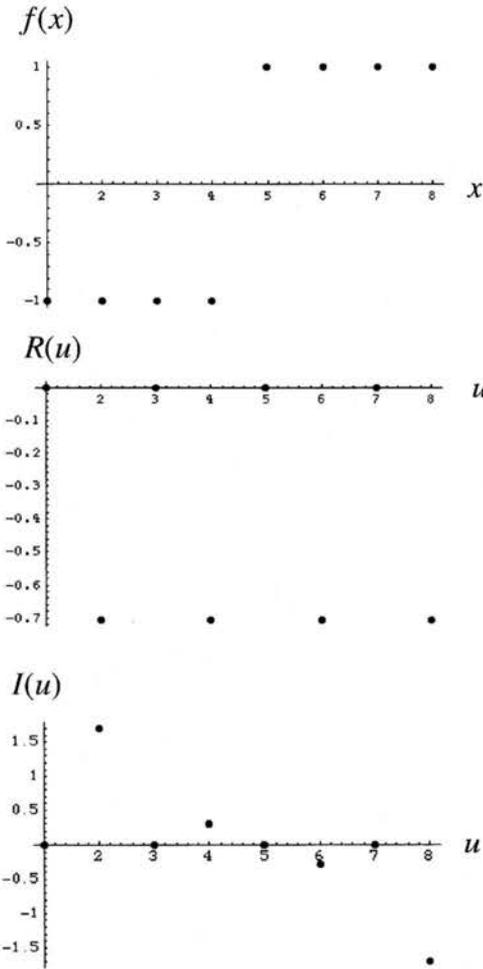


図11 $f(x)$ とその離散フーリエ変換の実数部 $R(u)$ と虚数部 $I(u)$

3. 投影定理

図15(a)は被写体の薄い断面を2次元の矩形関数とし、その領域内では線減弱係数、水素原子濃度、RI濃度など映像の対象となる物理量 $f(x,y)$ が一定値(黒色で示す)をとると仮定したものである。矩形内の領域において、 $f(x,y)$ が (x,y) 座標に関係なく一定値 A をもつことは以下のように表される。

$$f(x,y) = \begin{cases} A & -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a \\ 0 & |x| > a, |y| > a \end{cases} \quad (20)$$

このような被写体を x 軸に平行に検出器を置きデータ収集すると、各 x 座標について等しい大きさの物理量が測定されるのでその強度分布は矩形関数になる。その縦座標は $f(x,y)$ を y について積分したものであり、これが x 方向の投影 $f(x)$ である。積分値は y 軸に平行な直線上で $f(x,y) = A$ という関数の総和 $2aA$ であるから、投影は $p(x) = 2aA$ と表される ($f(x,y)$ と

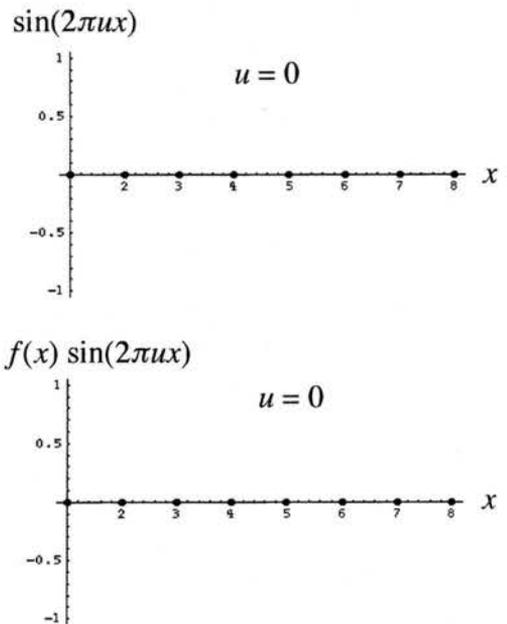


図12 離散フーリエ変換の計算過程 ($u=0$ の場合)

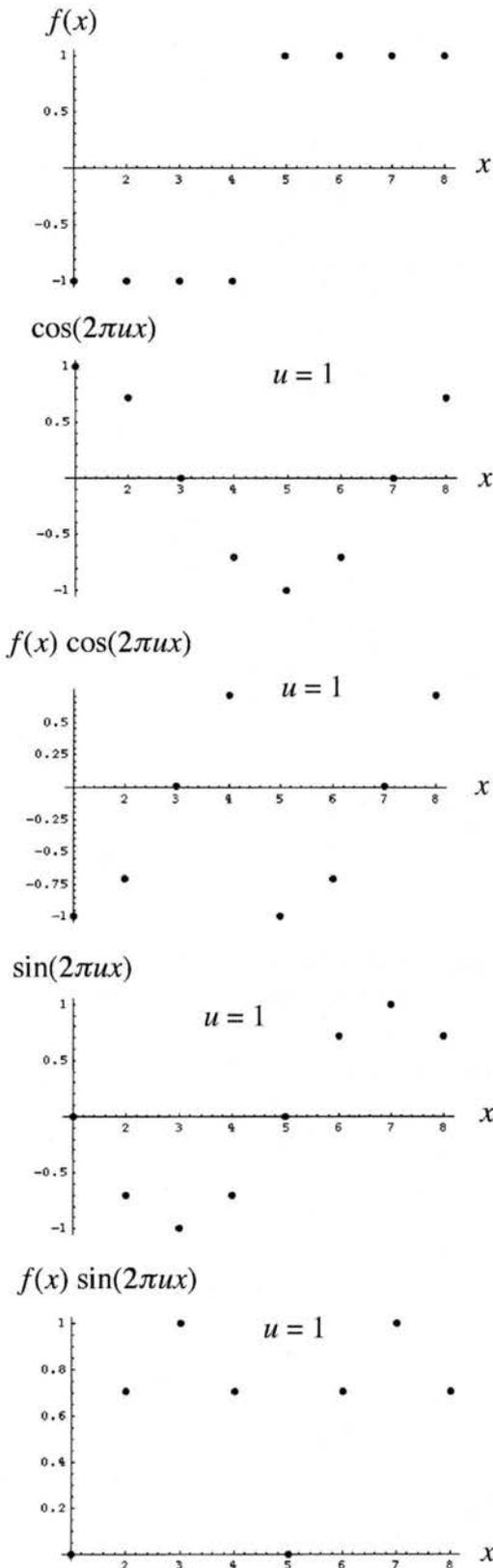


図13 離散フーリエ変換の計算過程 ($u=1$ の場合)

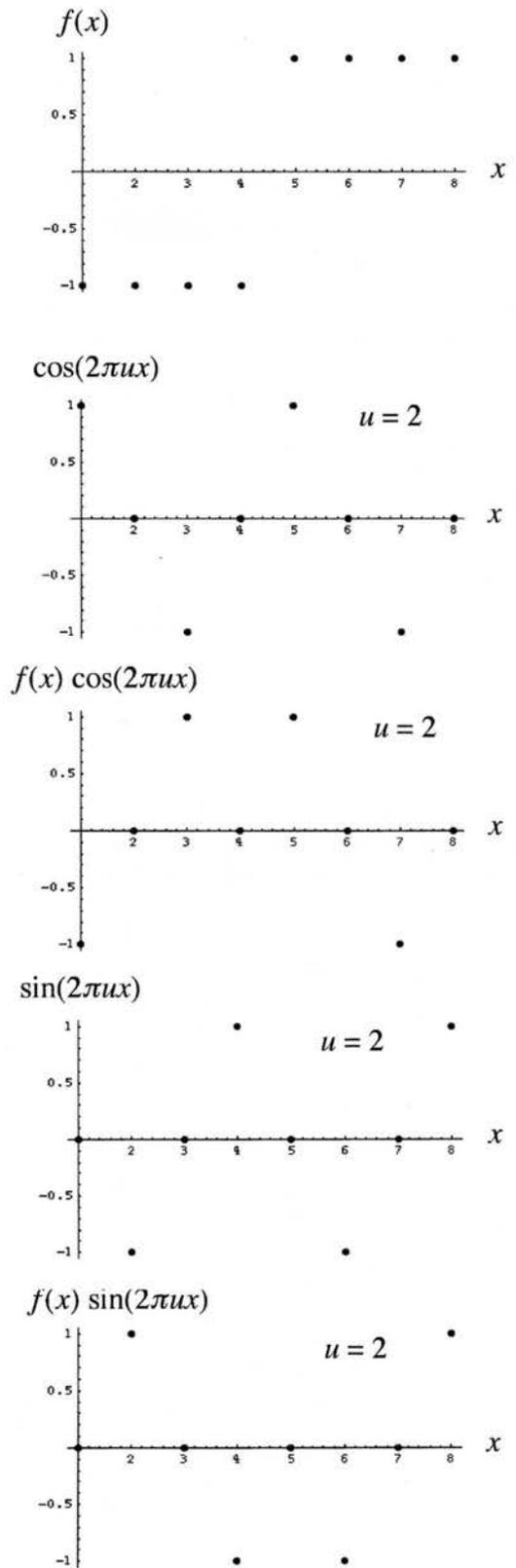


図14 離散フーリエ変換の計算過程 ($u=2$ の場合)

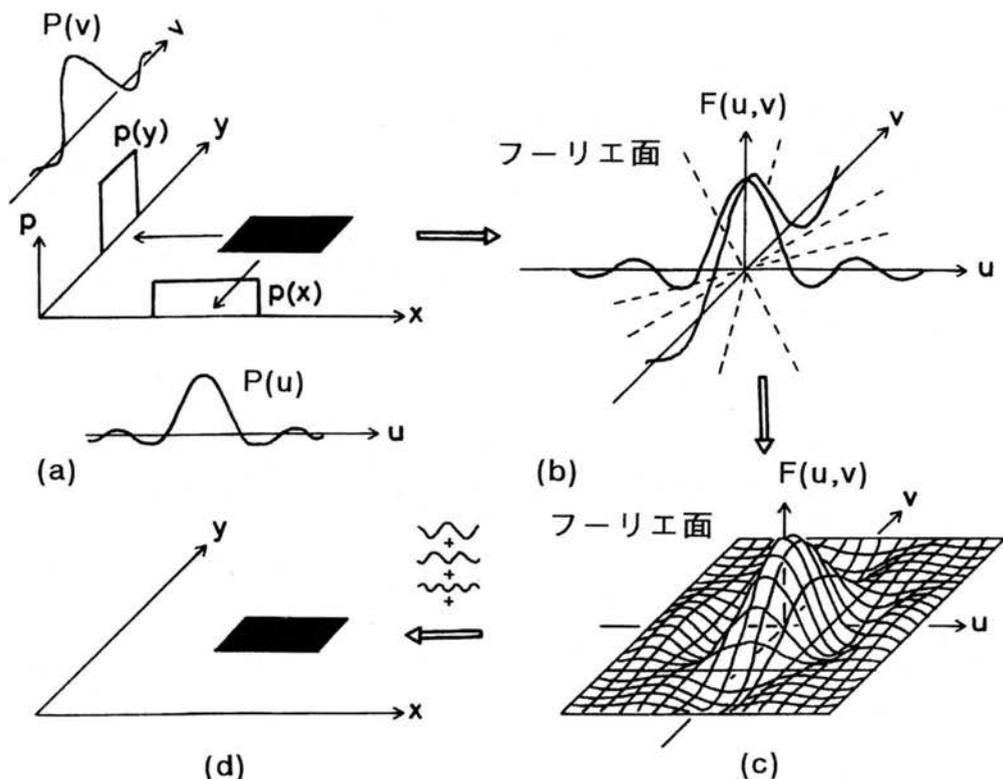


図15 フーリエ変換法による画像再構成

(a) 被写体の断面が矩形関数で表される場合の投影、(b) (a) の投影の1次元フーリエ変換、(c) 360度方向について収集した各投影の1次元フーリエ変換による被写体の2次元フーリエ変換の合成、(d) (c) のフーリエ逆変換による断面の再構成。

$f(x)$ の関係は第3回で詳しく述べる)。

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = A \int_{-a}^a dy = 2aA \quad (21)$$

同様に検出器をy軸に平行においてデータ収集すると、各y座標について等しい大きさの物理量が測定されるのでその強度分布は矩形関数になる。このときの投影は $p(y) = 2aA$ と表される。図15では1次元の投影と被写体の断面を表す2次元関数を便宜上ともに矩形関数としたので、両者を区別するために投影は3次元プロットのように示してある。

(a)においてx方向の周波数領域の座標をu、y方向の周波数領域の座標をvとし、 $p(x)$ および $p(y)$ のフーリエ変換をそれぞれ $P(u)$ および $P(v)$ と表すことにする。 $p(x)$ や $p(y)$ は (10) 式の矩形関数と値が $2a$ 倍されることを除き同じなので、それらの1次元フーリ

エ変換も (11) 式と同様に計算できる。実際の投影は離散データであるから2節の1) のようなデータ数列として得られるが、そのフーリエ変換は例で示した方法で計算可能である。検出器をx軸に平行な位置から少しずつ回転させながら投影を収集し、その1次元フーリエ変換を周波数領域において投影を得た方向に順に並べていくと(b)のような2次元関数が得られる。そして、これが $f(x,y)$ の2次元フーリエ変換 $F(u,v)$ に等しくなるのである。ここでは被写体の断面を $f(x,y) = A$ の既知の関数として扱ったが、一般には $f(x,y)$ が求めるものなので未知である。しかし、被写体の投影を360度の方向から収集すればその断面の2次元フーリエ変換を(c)のように求めることができ、これをフーリエ逆変換することにより断面が(d)のように再構成される。投影定理は被写体の2次元フーリエ変換と投影の1次元フーリエの関係を表すものである。

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会

〒107-0052 東京都港区赤坂 9-6-41 乃木坂ビル 3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619