連続講座

断層映像法の基礎　第5回
フーリエ変換の実際の計算法

篠原　広行[1)]
橋本　雄幸[2)]
杉本　英治[3)]

1) 東京都立保健科学大学　放射線学科
2) 横浜創英短期大学　情報処理学科
3) 昭和大学藤が丘病院　放射線科

はじめに

第4回までに、フーリエ変換や投影定理ついての理論を説明してきた。こういった理論を実際の装置に応用するために、コンピュータが用いられている。コンピュータで計算させるには、その理論をアルゴリズムという形でプログラムに書き換える必要がある。コンピュータでは、デジタル画像のような標本化されたデジタルデータを取り扱い、様々な計算を行う。デジタルデータをコンピュータ上でフーリエ変換するとき、扱うデジタルデータが離散的なデータなので、離散フーリエ変換を用いる。離散フーリエ変換に関しては第2回で詳しく述べている。離散フーリエ変換を用いる場合、連続的な関数を扱う場合と若干異なる部分が出てくる。本稿では、コンピュータでの実際の計算を念頭に置き、連続的なフーリエ変換と離散的なフーリエ変換の違いを指摘し、コンピュータで計算するときの手法について述べる。まずは、1次元フーリエ変換について細かく見ていき、そのコンピュータへの応用について述べ、次に1次元フーリエ変換を2次元に拡張した形になる2次元フーリエ変換のコンピュータへの応用について述べる。最後に多次元への応用について簡単に述べる。

1. 1次元フーリエ変換の手法
2. 2次元フーリエ変換の手法
3. 多次元への応用

1. 1次元フーリエ変換の手法

1次元フーリエ変換の式は、第1回で示したように以下のように定義される。

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx \tag{1}$$

ここで、f(x)は実領域の関数で、F(u)はそれに対応するフーリエ領域の関数である。実領域の関数を矩形関数としてフーリエ変換を実行すると、**図1**に示すようなグラフになる。被写体の投影のような領域の限られた関数をグラフに表すとき、原点を投影関数の中心付近に持っていくのが通例である。そこで、**(1)式**のように関数の中心に原点があるような形をそのまま離散化すると以下のような式になる。

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=-N/2}^{N/2-1} f(x)e^{-i2\pi ux/N} \quad u=-\frac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{2}$$

ここで、Nはサンプリング数、f(x)は実領域の配列で、F(u)はそれに対応するフーリエ領域の配列である。離散化してフーリエ変換する場合、有限領域をサンプリングして配列にとり、その配列に対してフーリエ変換を行う。次に、**(2)式**を以下のように変形してみる。

$$\begin{aligned}F(u)&=\frac{1}{N}\sum_{x=-N/2}^{N/2-1} f(x)\cdot\left[\cos(2\pi ux)-i\sin(2\pi ux)\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{x=-N/2}^{N/2-1}\left[f_R(x)\cos(2\pi ux)+f_I(x)\sin(2\pi ux)\right]\\&\quad-\frac{i}{N}\sum_{x=-N/2}^{N/2-1}\left[f_R(x)\sin(2\pi ux)-f_I(x)\cos(2\pi ux)\right]\end{aligned}$$

ここで$f_R(x)$はf(x)の実数部で$f_I(x)$はf(x)の虚数部を表す。この式の実数部**(2行目の式)**に注目すると、周期Nの周期関数をフーリエ級数展開する式に似ていることが分かるであろう。また、逆変換の式も同様な形に変形できる。離散化した配列f(x)とF(u)は、有限領域をN個でサンプリングしているが、有限領域の外側も含めて考えると、f(x)とF(u)は、そのサンプリング数Nを周期とした周期関数のように振舞うことが分

別刷請求先：〒116-8551 東京都荒川区東尾久7-2-10　東京都立保健科学大学 保健科学部放射線学科　篠原　広行
Tel：03-3819-1211 Fax：03-3819-1406

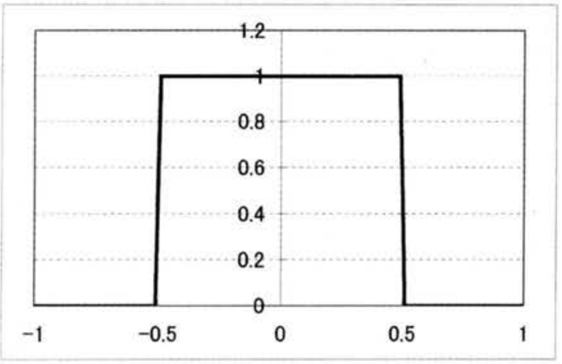

図1 (a) 矩形関数 (rect関数)

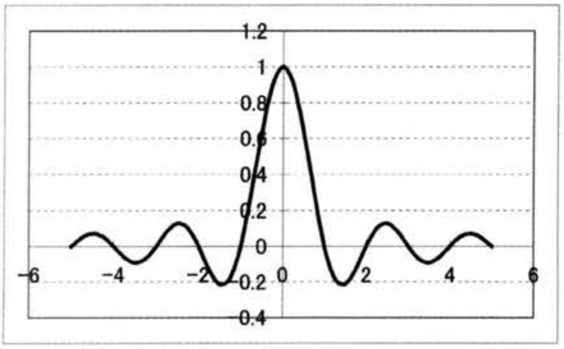

図1 (b) 矩形関数 (rect関数) をフーリエ変換したsinc関数の一部

図1 矩形関数とそのフーリエ変換

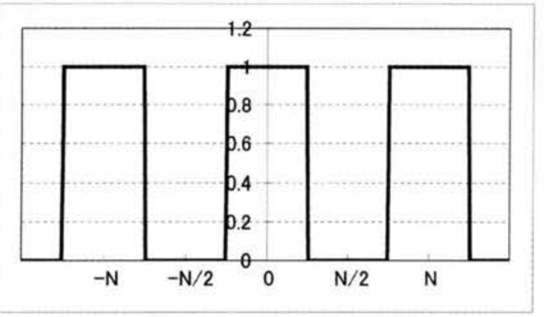

図2 (a) 有限領域の外側まで含めた矩形関数のグラフ

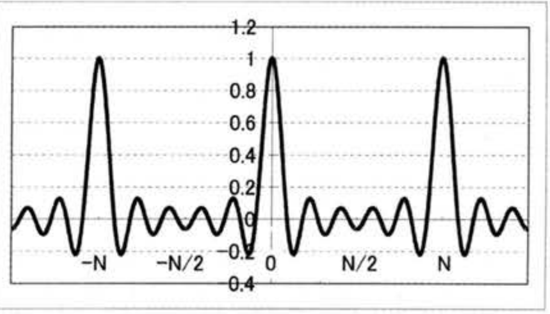

図2 (b) (a) を離散フーリエ変換し、有限領域の外側まで含めたグラフ

図2 矩形関数を有限領域でサンプリングした関数と、それを離散フーリエ変換した関数の有限領域の外側まで含めたグラフ、どちらも周期的な形になる

かる。これをf (x) が矩形関数の場合について示すと、f(x)を有限領域の外側まで含めて表したものが**図2 (a)**、そのフーリエ変換であるF (u) を有限領域の外側まで含めて表したものが**図2 (b)** である。

プログラムなどで配列を扱うとき、そのインデックスは0または1から始まり、負の数は用いない。そこで、配列を扱う離散フーリエ変換は、配列のインデックスを0から始めたほうが都合がいいので、通常は以下のように表す。この式は、前の式をN/2だけシフトした形になってい

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-i2\pi ux/N} \quad u=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (3)$$

ることが分かる。この式を用いる場合、f(x)とF(u)もN/2だけシフトする必要がある。f (x) とF (u) は、前述したとおり周期Nの周期関数のように振舞うので、シフトしてもそれによってデータが欠けるようなことはない。よって、フーリエ変換をコンピュータで行う場合は、**(3) 式**の計算をする前にf (x) の配列をN/2だけシフトし、計算した後のF (u) もN/2だけシフトする必要がある。f (x) とF (u) は周期Nの周期関数とみなせるので、この場合のシフトはf (x) およびF (u) の前半分と後ろ半分を入れ替えることに相当する。

以上のことより、コンピュータで1次元フーリエ変換をする手順を次に示す。
この手順にしたがって、矩形関数 (rect関数) をフーリエ変換する様子を**図3**に示す。

1. 実領域の配列f (x) の前半分と後ろ半分を入れ替える。
2. (3) 式にしたがって離散フーリエ変換し、フーリエ領域の配列F (u) を求める。
3. 配列F (u) の前半分と後ろ半分を入れ替える。

2. 2次元フーリエ変換の手法

2次元フーリエ変換の式は、第1回で示したように以下のように定義される。

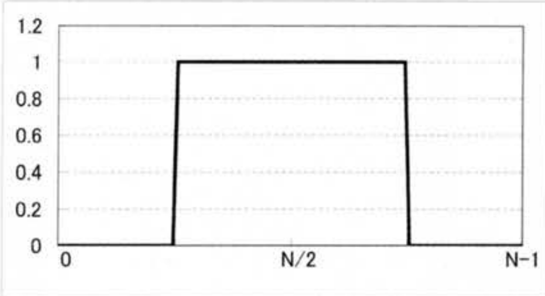

図3(a)　元の矩形関数のグラフ

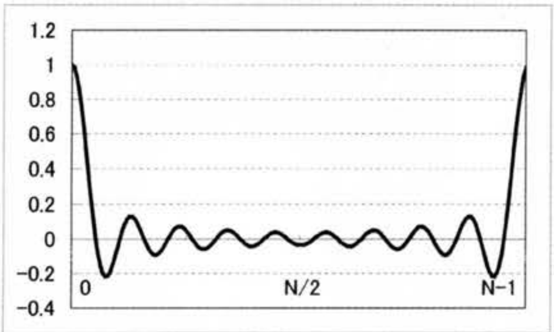

図3(c)　(b)を1次元離散フーリエ変換した結果のグラフ

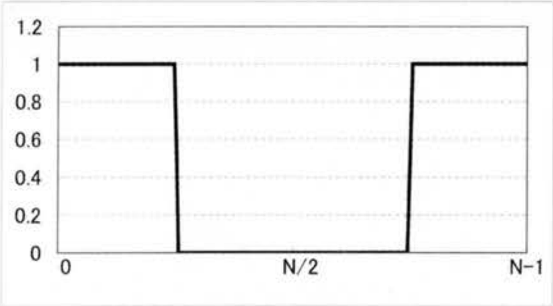

図3 (b) 矩形関数の前半分と後ろ半分を入れ替える

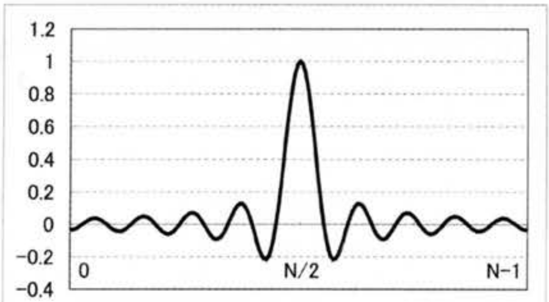

図3(d)　(c)の前半分と後ろ半分を入れ替える、これが(a)の関数を1次元フーリエ変換した結果になる

図3　矩形関数を1次元離散フーリエ変換をする手順

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{4}$$

ここで、f(x,y)は実領域の2次元関数で、F(u,v)はそれに対応するフーリエ領域の2次元関数である。実領域の関数を、円内の領域において値が1でそれ以外の領域では値が0となる2次元の円筒型の関数としてフーリエ変換を実行すると、**図4**に示すような画像になる。

また、通常用いられる2次元離散フーリエ変換の式は以下のように定義される。

$$F(u,v)=\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)/N}\quad u,v=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$

この式は次のように変形することができる。

$$F(u,v)=\sum_{y=0}^{N-1}e^{-i2\pi vy/N}\left[\sum_{x=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi ux/N}\right] \tag{6}$$

(6)式から分かるように、2次元の離散フーリエ変換は、2次元配列f(x,y)をxに関して1次元の離散フーリエ変換を行い、その後にyに関して1次元の離散フーリエ変換をすればよいということになる。2次元の場合も配列のインデックスは0から始まる。よって、1次元の場合と同様にフーリエ変換の計算を行う前と後に配列の入れ替えが必要となる。配列の入れ替えは、x方向およびy方向に1次元の離散フーリエ変換をするときにそれぞれの方向で行ってもかまわないが、通常は2次元の離散フーリエ変換の前後でまとめて入れ替えを行う。**図5**には、配列をx方向に入れ替えて、さらにy方向に入れ替えた様子が描かれている。**図5**の中に象現という言葉が出てくるが、座標系でx座標とy座標が両方とも正の領域を第1象限、x座標は負でy座標が正の領域を第2象限、x座標とy座標が両方とも負の領域を第3象限、そして、x座標が正でy座標が負の領域を第4象限と呼ぶ。ここでは便宜上入れ替え前の画像を4分割して、その分割線を座標軸とみなし、対応する場所をそれぞれの象限と呼ぶことにする。すると、x方向とy方向に別々に入れ替えた配列は、結局第1象限と第3象限を入れ替えて、第2象限と第4象限を入れ替えた配列と等しくなる。

以上のことより、コンピュータで2次元フーリエ変換をする手順を次に示す。

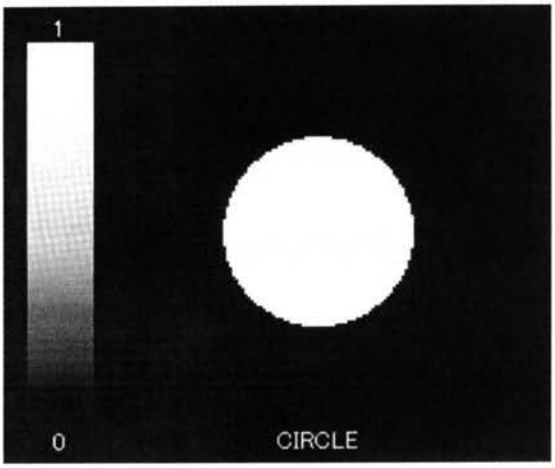

図4 (a) 円筒関数の画像

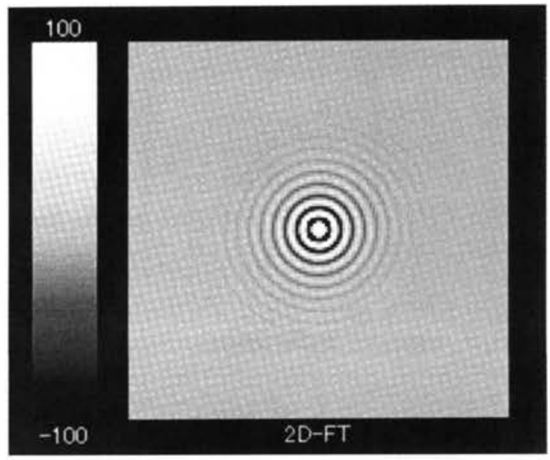

図4 (c) 円筒関数を2次元フーリエ変換した画像

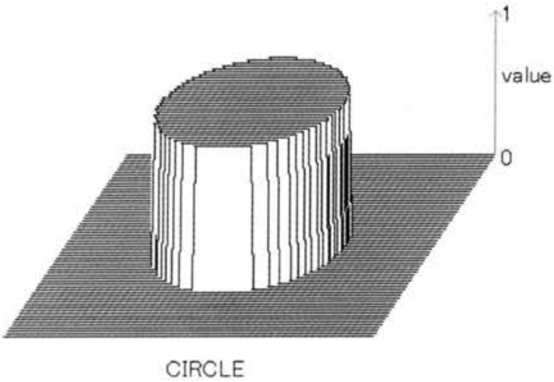

図4 (b) 円筒関数の鳥瞰図

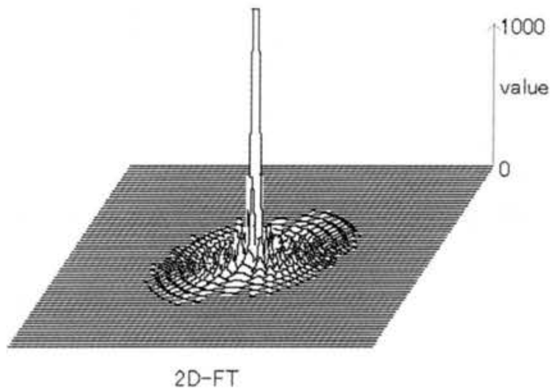

図4 (d) 円筒関数を2次元フーリエ変換した鳥瞰図

図4　円筒関数とその2次元フーリエ変換

1. 実領域の2次元配列f(x,y)の第1象限と第3象限、および第2象限と第4象限を入れ替える。
2. (5)式にしたがってフーリエ領域の2次元配列F(u,v)を求める。
3. 2次元配列F(u,v)の第1象限と第3象限、および第2象限と第4象限を入れ替える。

この手順にしたがって、円筒型の2次元関数をフーリエ変換する様子を**図6**に示す。配列の入れ替えが分かりやすいように画像を点線で4分割して表している。

3. 多次元への応用

MRI(核磁気共鳴影像法)において、選択励起を行わずに直接3次元でデータ収集を行った場合、その画像再構成には3次元のフーリエ変換が必要になる。3次元以上の関数についてフーリエ変換する場合、1次元フーリエ変換の拡張とみなして計算していくのが最も理解しやすい。2次元のときに述べたのと同様に、多次元の場合は1つの次元軸に関して1次元フーリエ変換をすべてのデータについて行い、それをすべての次元軸に対して順番に行っていけば多次元フーリエ変換を実行することができる。

3次元の場合では、離散フーリエ変換を以下のように表すことができる。

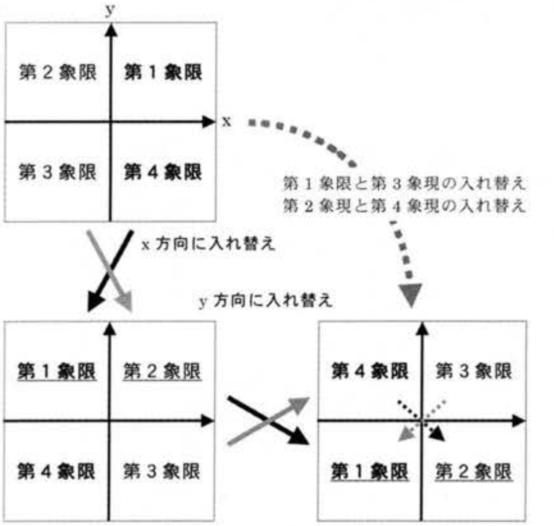

図5　2次元配列をx方向に入れ替えて、さらにy方向に入れ替えると、第1象現と第3象現を入れ替えて第2象現と第4象現を入れ替えた2次元配列と等しくなる

$$F(u,v,w)=\sum_{z=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} f(x,y,z)e^{-i2\pi(ux+vy+wz)}\quad u,v,w=0,1,2\cdots,N-1 \tag{7}$$

この場合も、以下のように変形できる。

$$F(u,v,w)=\sum_{z=0}^{N-1} e^{-i2\pi wz}\left[\sum_{y=0}^{N-1} {}^{-i2\pi vy}\left(\sum_{x=0}^{N-1} f(x,y,z)e^{-i2\pi ux}\right)\right] \tag{8}$$

(8)式より、3次元の離散フーリエ変換をするには、まずxに関して1次元離散フーリエ変換を行い、次にyに関して1次元離散フーリエ変換を行い、さらにzに関して1次元離散フーリエ変換を行えばよいことが分かる。3次元でも配列の入れ替えが必要になる。3次元配列で1度に入れ替えを行おうとすると分かりづらくなるので、この場合は、1次元ごとに入れ替えを行えばよい。

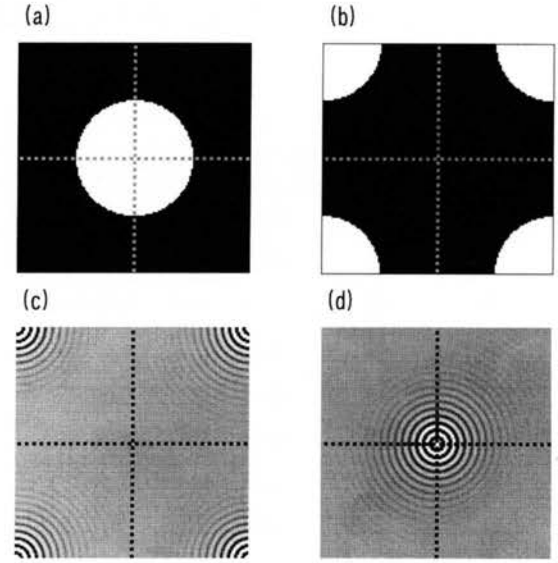

図6　円筒関数のデジタル画像を2次元フーリエ変換する手順
(a) 円筒関数のデジタル画像
(b) (a) の2次元配列の入れ替えを行った画像
(c) (b) を2次元離散フーリエ変換した画像
(d) (c) の2次元配列の入れ替えを行った画像、これが (a) の画像を2次元フーリエ変換した画像になる

1次元や2次元フーリエ変換は頻繁に出てくるが、3次元フーリエ変換などのさらに高い次元のフーリエ変換も出てくることがあるので、まずはその基本となる1次元フーリエ変換を確実に行えるようにすることが肝要である。