

## 連続講座

## 断層映像法の基礎 第9回 MRI 投影再構成法のシミュレーション

篠原 広行<sup>1)</sup>橋本 雄幸<sup>2)</sup>杉本 英治<sup>3)</sup>

1) 東京都立保健科学大学 放射線学科

2) 横浜創英短期大学 情報処理学科

3) 昭和大学藤が丘病院 放射線科

## はじめに

第8回までに、MRIの基礎をその理論を中心に説明してきた。どのような原理で計測され、その測定データからフーリエ変換を利用してどのように画像を再構成するかなど、画像を作る上での基本となる部分を、数式などの上で見てきたことになる。本稿では、その計測と画像再構成の部分を計算機上でシミュレートすることで、さらに詳しく説明する。計算機上で数値ファントムを作成して、そのファントムからどのような信号が計測され、それを元にどのように画像が再構成されるのかを計算機シミュレーションで示す。

今回は、MRIの画像再構成の基本である投影再構成法でのシミュレーションを示す。まずは、マトリックスの1点にのみ水素原子がある場合の計測データを示す。次に、そのデータから、元の1点が再構成され、その位置を特定できることを示す。ここで用いる再構成法は、フィルタ補正逆投影 (filtered back-projection: FBP) である。次に、数値ファントムを用いたシミュレーションを示すが、まずは、数値ファントムがどのようなものであるかを説明し、投影再構成法での計測データを示す。最後にその画像再構成を行い、再構成された画像を示す。

1. 1点画像の計測
2. 1点画像の再構成
3. 数値ファントムからの計測
4. 数値ファントムの画像再構成

### 1. 1点画像の計測

1方向に勾配磁場Gを加えると、その方向における水素原子核の共鳴周波数は、その方向で線形的に変

化する。勾配磁場を加える方向をXとすると共鳴周波数 $\omega$ はXの関数となり、式で表すと、

$$\omega(X) = \gamma (B_0 + GX) \quad (1)$$

となる。ここで、 $\gamma$ は磁気回転比で、 $B_0$ は静磁場の強度である。水素原子がある1点 $X_0$ にのみ存在する場合、そこから出てくる信号 $s(t)$ は、

$$s(t) = S_0 e^{-i\gamma (B_0 + GX_0)t} \quad (2)$$

となる。ここで、 $S_0$ は $X_0$ に存在する水素原子の量に相当する強度である。実際の計測は、実部の値と虚部の値に分けて計測するわけだが、その場合、計測のためのコイルを90度ずらした位置に置いて計測する。実部の計測値は、

$$s_{re}(t) = S_0 \cos[\gamma (B_0 + GX_0)t] \quad (3)$$

となり、虚部の計測値は、

$$s_{im}(t) = -S_0 \sin[\gamma (B_0 + GX_0)t] \quad (4)$$

となる。

この計測値に実際の値を当てはめて、シミュレーションする。磁気回転比 $\gamma$ は水素原子核の場合、42.58MHz/T (テスラ) である。静磁場強度 $B_0$ を1T (テスラ) と仮定し、勾配磁場Gを0.1G (ガウス)/cmとする。1G (ガウス) は、 $10^{-4}$ T (テスラ) である。水素原子の信号強度 $S_0$ は1とし、 $X_0$ を中心から5cm離れた場所に設定する。すると、実部の計測値は、

$$s_{re}(t) = \cos[2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times (1 + 0.1 \times 10^{-4} \times 5) \times t] \quad (5)$$

となる。一方、虚部の計測値は、

$$s_{im}(t) = -\sin[2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times (1 + 0.1 \times 10^{-4} \times 5) \times t] \quad (6)$$

となる。これらの計測値は、静磁場強度の値が乗った形になっているので、ここから静磁場強度の影響を取り除いてやる。その方法は、

$$s(t) = e^{-iyB_0 t} \times e^{-iyGX_0 t} \quad (7)$$

と2つの積に分けて考え、静磁場強度の影響を取り除いた値 $s'(t)$ を、

$$s'(t) = s(t) \times e^{iyB_0 t} = e^{-iyGX_0 t} \quad (8)$$

と計算することができる。すると、計測値の実部と虚部は、

$$s'_{re}(t) = \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times t) \quad (9a)$$

$$s'_{im}(t) = -\sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times t) \quad (9b)$$

となる。計測を0.1msごとに行うとすると、

$$s'_{re}(k) = \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times k \times 10^{-4}) \quad (10a)$$

$$s'_{im}(k) = -\sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times k \times 10^{-4}) \quad (10b)$$

となる。ここで、 $k$ は0から計測数 $n$ までの整数値をとる。この式をグラフにして表したものを図1に示す。また、勾配磁場 $G$ を0.2G/cm、0.05G/cm、0.02G/cmに変えたグラフをそれぞれ図2(a)から(c)に示す。勾配磁場を小さくするほど、正弦曲線がなめらかになっていることが分かる。

### 2. 1点画像の再構成

画像の大きさを縦横共に20cmとし、画像の中心から右(x軸の正の方向)へ5cmのところのところに1点だけ水素原子が存在するものとする。画像のマトリックスを128×128画素としたときの1点の画像を図3に示す。投影再構成法では、勾配磁場の方向を変えながら各方

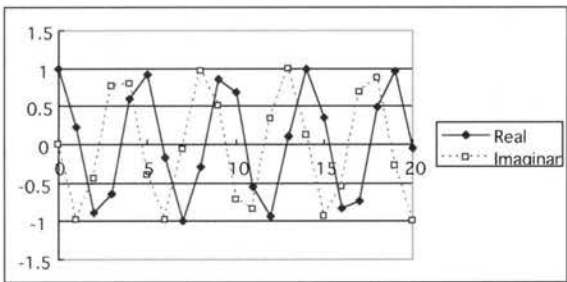
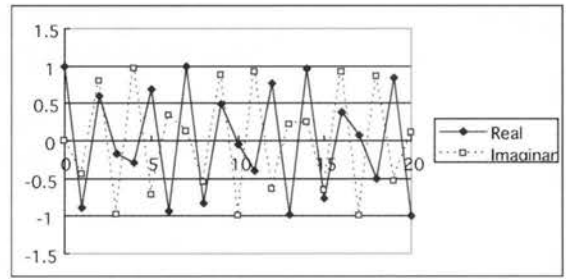
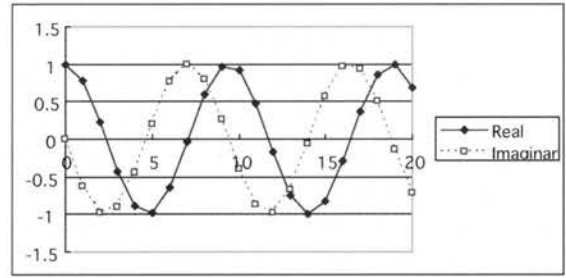


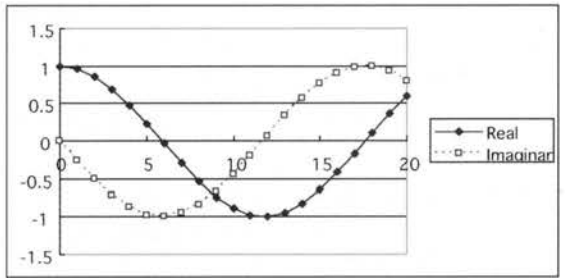
図1 計測の勾配磁場 $G$ を0.1G/cmとしたときの計測データのグラフ。水素原子の信号強度 $S_0$ は1とし、水素原子が存在する1点の位置を中心から5cm離れた場所に設定し、サンプリング間隔を0.1msで計測したと仮定している。



(a) 勾配磁場が0.2G/cmの場合



(b) 勾配磁場が0.05G/cmの場合



(c) 勾配磁場が0.02G/cmの場合

図2 勾配磁場 $G$ を変えた場合の計測データのグラフ。

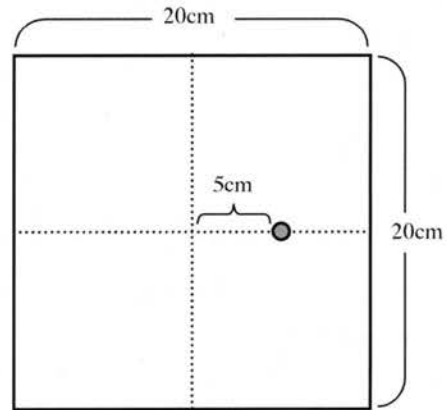


図3 画像上で、水素原子が存在する点を示している。画像の大きさは20cm正方形で、水素原子の位置は、画像の中心から右方向に5cmずれたところにある。

向の投影のフーリエ変換に相当するデータを計測していく。よって、計測データは $\theta$ の関数となる。計測データ上の水素原子の位置 $X(\theta)$ は、

$$X(\theta) = 5\cos\theta \quad (11)$$

となる。このとき、 $\theta$ はx軸とのなす角度を示す。水素原子の強度の投影は、どの角度でも等しくなるので、信号強度に相当する部分を全て1とおく。その上で、(10a,10b)式の計測データを、角度を含めた関数として書き直すと、

$$s'_{re}(k, \theta) = \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times \cos\theta \times k \times 10^{-4}) \quad (12a)$$

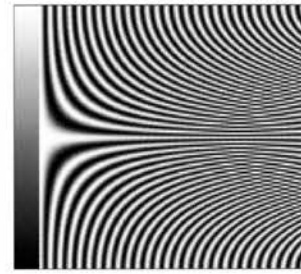
$$s'_{im}(k, \theta) = -\sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times 5 \times \cos\theta \times k \times 10^{-4}) \quad (12b)$$

となる。ここでも、 $k$ は0から計測数 $n$ までの整数値をとる。実部と虚部の計測データを、 $k$ と $\theta$ を軸として画像で表したものを図4(a), (b)に示す。横方向は、投影あたりの計測値の並びである $k$ 軸とし、縦方向は、異なった投影のデータを順番に並べた $\theta$ 軸としている。このデータはFID信号に相当するので、計測データはフーリエ変換に必要なデータの半分しかない。ここから画像を再構成する場合は、残り半分のデータを作る必要がある。再構成画像が実部しか存在しないことから、フーリエ変換領域(計測領域)の実部のデータは、 $k$ が負の場合はそのまま折り返せばよい。また、虚部のデータは、 $k$ が負の場合は折り返してから-1を掛けて正負を逆にする。その処理を施したデータからFBP法を用いて再構成した結果を図5に示す。

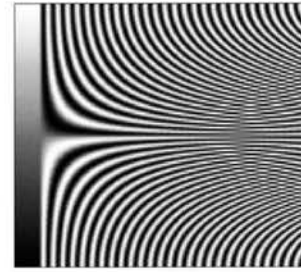
また、勾配磁場 $G$ を0.2G/cm、0.05G/cm、0.02G/cmに変えた場合の実部と虚部の計測データと再構成の結果をそれぞれ図6(a)から(i)に示す。勾配磁場を小さくしていくと、計測データがなめらかになり、再構成像の点の位置が中心に近づいていく。これは、勾配磁場によって、画像視野の範囲が変わってきていることを示している。勾配磁場を大きくすると、画像視野の範囲が小さくなっていることが分かる。128×128の画像視野をはじめに仮定した20cm正方形にするためには、勾配磁場 $G$ を約0.12G/cmにすればよい。その時の実部と虚部の計測データと再構成の結果をそれぞれ図7(a)から(c)に示す。

### 3. 数値ファントムの計測

ここで用いる数値ファントムの形状を図8(a)に、その画像を図8(b)に示す。画素数は128×128で、1辺は20cmとする。この数値ファントムは楕円の組み合わせ



(a) 実部の計測データ



(b) 虚部の計測データ

図4 計測データを、時間軸 $k$ を横軸、角度 $\theta$ を縦軸として、画像で表したもの。勾配磁場 $G$ は0.1G/cmでサンプリング間隔を0.1msとしている。

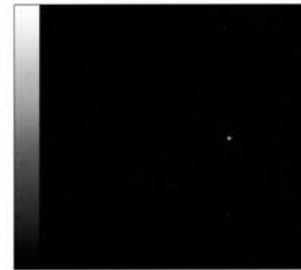


図5 勾配磁場 $G$ が0.1G/cmのデータ(図4のデータ)からFBP法を用いて再構成した画像

で作られており、構成されている楕円の形状と値は表1に示したとおりである。数値ファントムの画像の値は、1番目の楕円から順にそれらの値を加えていったものになる。

数値ファントムの場合、計測される信号は、画像の各点から放出された信号の和となる。また、投影再構成法では、一方向にのみ勾配磁場をかけるので、その方向に垂直な向きのデータは、同じ周波数を持つ。よって、その向きのデータは同じ周波数として足し合わさった形となる。これは、勾配磁場と垂直な方向では、単純に足し合わせとなり、勾配磁場方向では、場所によって周波数が異なり、最終的にそれらが重なり合っ

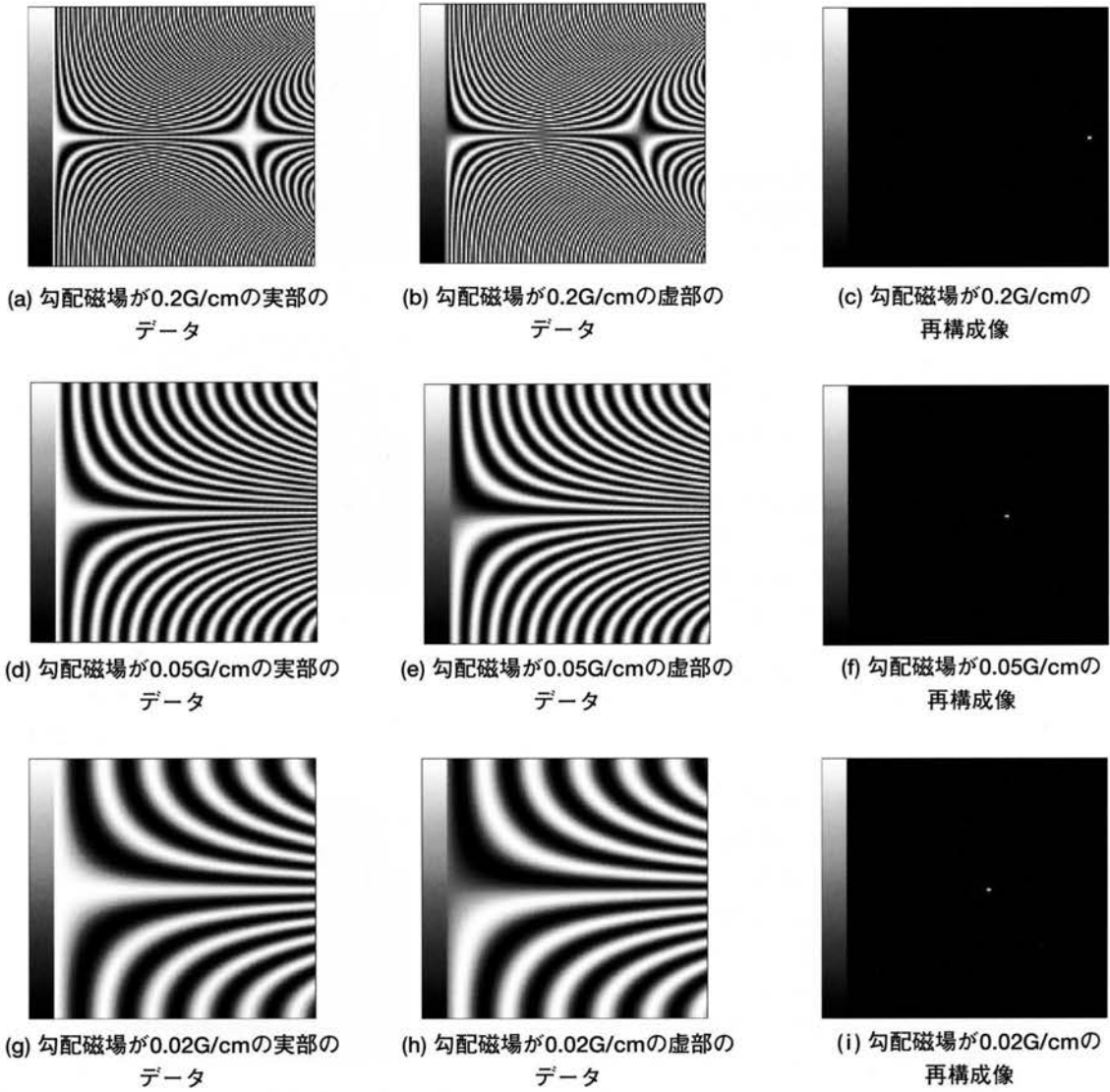


図6 勾配磁場Gを変えた場合の計測データと再構成の結果。

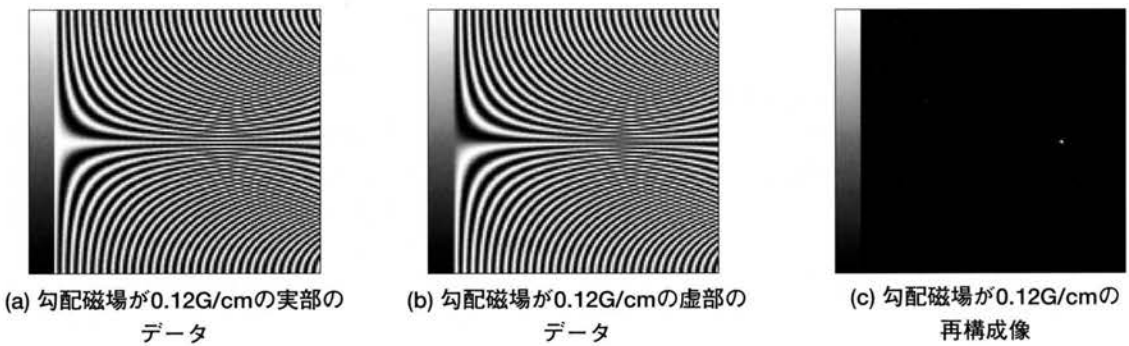
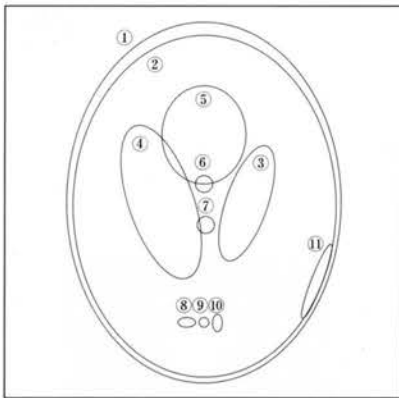


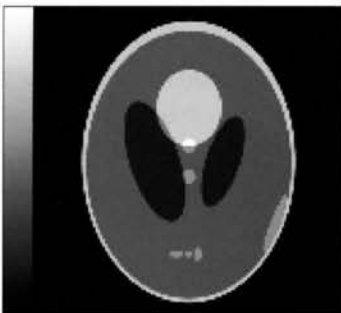
図7 勾配磁場を0.12G/cmにした場合の計測データと再構成の結果。

表1 数値ファントムの楕円の構成。数値ファントムはこれらの楕円を組み合わせで作られている。表の数値は、画像の中心を原点として、縦軸、横軸共に±1の長さに規格化されている。

	中心の座標	短軸の長さ	長軸の長さ	回点角度(°)	楕円の値
①	(0.0,0.0)	0.69	0.92	0.0	2.0
②	(0.0,-0.0184)	0.6624	0.874	0.0	-1.0
③	(0.22,0.0)	0.11	0.31	-18.0	-0.7
④	(-0.22,0.0)	0.16	0.41	18.0	-0.7
⑤	(0.0,0.35)	0.21	0.25	0.0	1.0
⑥	(0.0,0.1)	0.046	0.046	0.0	0.5
⑦	(0.0,-0.1)	0.046	0.046	0.0	0.5
⑧	(-0.08,-0.605)	0.046	0.023	0.0	0.5
⑨	(0.0,-0.605)	0.023	0.023	0.0	0.5
⑩	(0.06,-0.605)	0.023	0.046	0.0	0.5
⑪	(0.56,-0.4)	0.03	0.2	-21.0	0.5



(a) 数値ファントムの楕円の構成図



(b) 数値ファントムを画像表示したもの

図8 数値ファントムの形状。画素数は128×128で、1辺は20cm。楕円の組み合わせで作られている。

たものが計測されることになる。垂直な方向を足し合わせた強度は勾配磁場方向Xの関数となり、それをS(X)とし、(2)式を書き換えると、

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(X) e^{-iy(B_0+GX)t} dX \tag{13}$$

となる。静磁場強度 $B_0$ が含まれる項は、積分の外に出せるので、その影響は計測後に取り除くことができ、その項を取り除いた式は、

$$s'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(X) e^{-iyGXt} dX \tag{14}$$

と表される。これを勾配磁場Gが0.1G/cmのときのシミュレーションに当てはめて書き直すと、

$$s'_{re}(t) = \sum_{j=-64}^{63} S(j) \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times t) \tag{15a}$$

$$s'_{im}(t) = \sum_{j=-64}^{63} -S(j) \sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times t) \tag{15b}$$

となる。数値ファントムでは、128画素が20cmに相当しているので、Xは画素長jで表すと $20/128 \times j$ となる。S(j)は、Xの関数を画素長jの配列として書き直している。計測を0.1msごとに行うと、

$$s'_{re}(t) = \sum_{j=-64}^{63} S(j) \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times k \times 10^{-4}) \tag{16a}$$

$$s'_{im}(t) = \sum_{j=-64}^{63} -S(j) \sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times k \times 10^{-4}) \tag{16b}$$

となる。ここで、kは0から計測数nまでの整数値をとる。

この式は、異なる周波数の波がS(j)で決められる強度を持って足し合わさった形になっている。この足し合わせの一部をグラフにして、図9に示す。図9では、Xの位置が異なるデータが、異なる周波数を持った波

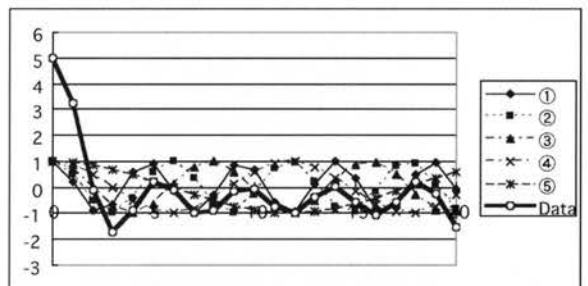


図9 異なる位置のデータが、異なる周波数を持って現れ、それが足し合わさって計測データとなる様子を表したグラフ。一部のデータのみを示しているが、異なる周波数の波が足し合わさって、計測データとなる様子を見て取ることができる。

として表され、その足し合わせが計測データとなる様子を見て取ることができる。

#### 4. 数値ファントムの画像再構成

投影再構成法では、勾配磁場の角度を変えて1周分計測しなければならないので、信号の強度 $S(X)$ と計測データ $s(t)$ は、それぞれ角度 $\theta$ の関数になる。よって、 $\theta$ の関数として書き換えると、(13)式は、

$$s'(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(X, \theta) e^{-iy(B_0 + GX)t} dX \quad (17)$$

となる。静磁場強度 $B_0$ の項を取り除いた式 $s'(t)$ も $\theta$ の関数になるので、(14)式は、

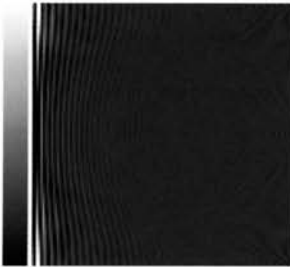
$$s'(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(X, \theta) e^{-iyGXt} dX \quad (18)$$

となる。よって、最終的なシミュレーションの式は、計測を0.1msごとに行う場合、

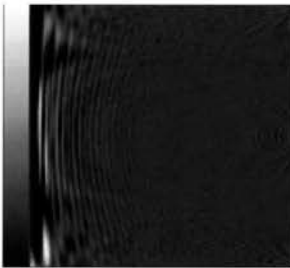
$$s'_{rc}(k, \theta) = \sum_{j=-64}^{63} S(j, \theta) \cos(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times k \times 10^{-4}) \quad (19a)$$

$$s'_{im}(k, \theta) = \sum_{j=-64}^{63} -S(j, \theta) \sin(2 \times \pi \times 42.58 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-4} \times \frac{20}{128} \times j \times k \times 10^{-4}) \quad (19b)$$

となる。ここで、 $k$ は0から計測数 $n$ までの整数値をとる。この式を $k$ と $\theta$ を軸として画像で表したものを図10(a), (b)に示す。



(a) 実部の計測データ



(b) 虚部の計測データ

図10 数値ファントムから作成した計測データを、時間軸 $k$ を横軸、角度 $\theta$ を縦軸として、画像で表したもの。勾配磁場 $G$ は0.1G/cmでサンプリング間隔を0.1msとしている。

この計測データは、FID信号に相当しているので、やはり半分のデータしかない。残り半分のデータを2節で示したように作る必要がある。半分のデータを付加えたデータからFBP法を用いて画像を再構成する。再構成した結果を図11に示す。

また、勾配磁場 $G$ を0.2G/cm、0.05G/cm、0.02G/cmに変えた場合の実部と虚部の計測データと再構成の結果をそれぞれ図12(a)から(i)に示す。勾配磁場が0.2G/cmの場合は、再構成像が視野範囲を超えているので、折り返しの影響が出ている。逆に、勾配磁場を小さくすると、視野範囲が広がり、再構成像は小さくなる。よって、勾配磁場が大きい方が、再構成像のより細かい部分を拡大して再構成できることが分かる。視野範囲を仮定した20cm正方形になるように、勾配磁場を0.12G/cmとして計測し、再構成した結果を図13(a)から(c)に示す。

MRI計測の場合、サンプリング間隔が一定の場合、勾配磁場の強度によって再構成される画像の視野範囲が異なる。勾配磁場を大きくすると、視野範囲が狭まるが再構成される画像は大きくなり、より細かいところも再構成できるようになる。ただし、勾配磁場をより大きくした場合、再構成画像に折り返しが起こらないようにサンプリング間隔をより小さくする必要がある。

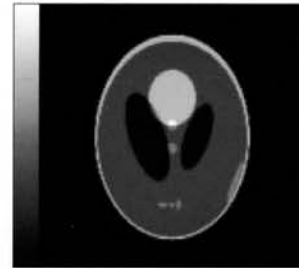


図11 勾配磁場 $G$ が0.1G/cmの数値ファントムの計測データ(図10のデータ)からFBP法を用いて再構成した画像。



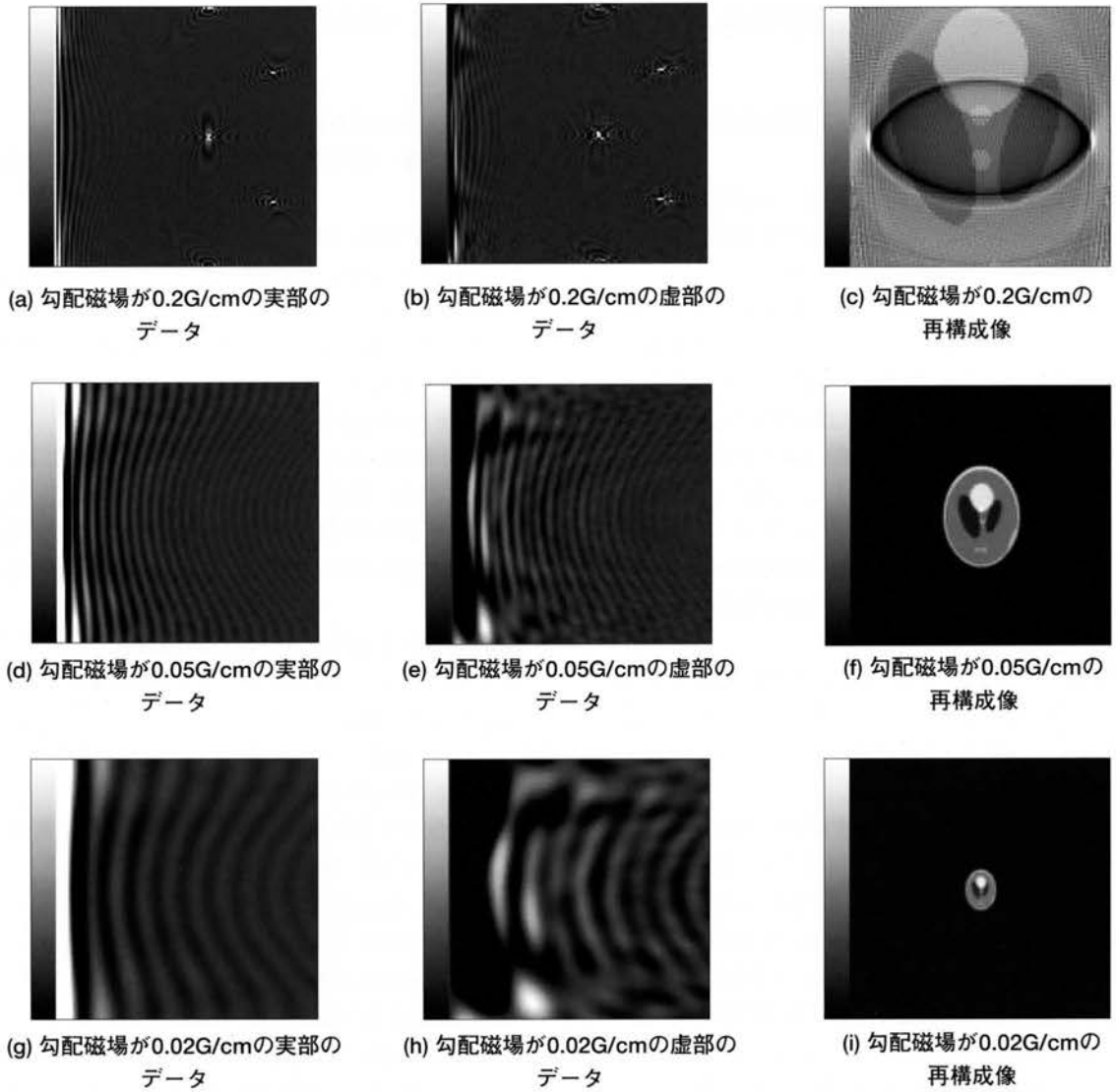


図12 勾配磁場Gを変えた場合の数値ファントムの計測データと再構成の結果。

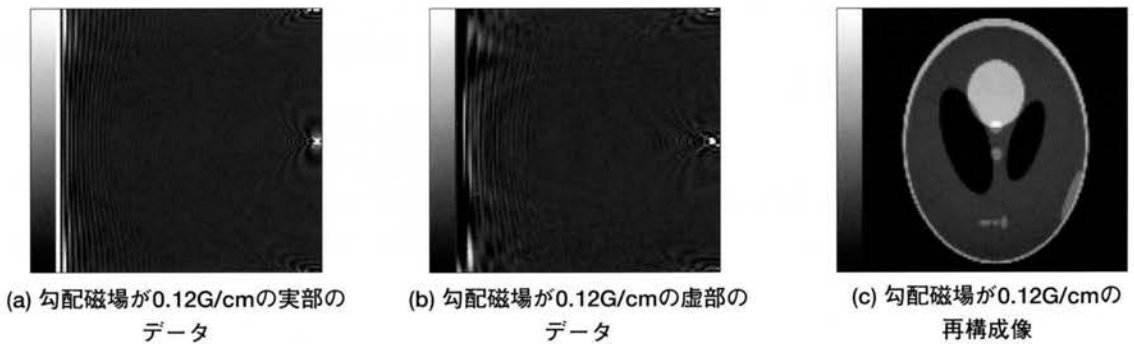


図13 勾配磁場を0.12G/cmにした場合の数値ファントムの計測データと再構成の結果。

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

### 複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会

〒107-0052 東京都港区赤坂9-6-41 乃木坂ビル3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619