



## 断層映像法の基礎 第29回 2次元ファンビームの投影と画像再構成

篠原 広行<sup>1)</sup>、梶原 宏則<sup>1)</sup>、中世古 和真<sup>1)</sup>、橘 篤志<sup>1)</sup>、橋本 雄幸<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 首都大学東京人間健康科学研究科 放射線科学域

<sup>2)</sup> 横浜創英短期大学 情報学科

### はじめに

第28回までで、レジストレーションについてその基本から非剛体レジストレーションまで解説してきた。今回から直接MRIの画像再構成には使われていないが、CTの世界ではよく使われている2次元のファン(扇状)ビームと3次元のコーン(円錐状)ビームからの画像再構成について解説する。本稿では2次元画像再構成で使われているファンビームから投影データを取得する方法とその投影データから画像再構成する方法について解説する。

1. パラレルビームとファンビーム
2. ファンパラ変換と投影再構成法
3. ファンビームからの直接再構成法

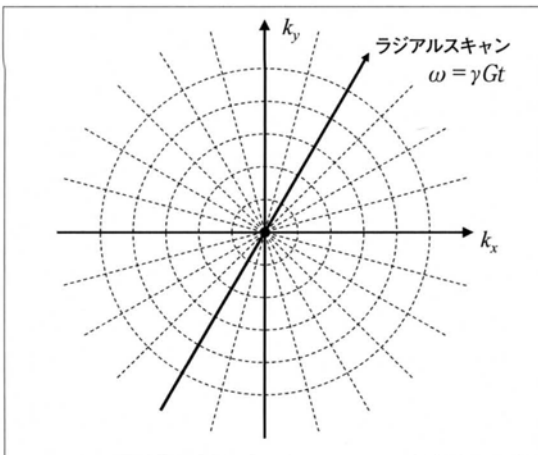


図1. k空間におけるラジアルスキャン(投影再構成法)

### 1. パラレルビームとファンビーム

MRIの投影再構成法は、k空間を極座標系でスキャン(ラジアルスキャン)して画像再構成を行う。図1に示すように、1方向をスキャンしたk空間のデータを1次元フーリエ逆変換すると図2に示すような実空間での被写体の同じ方向の投影データになる。この場合、被写体に対してパラレルビーム(平行ビーム)で投影をとった投影データに相当する。

一方、ファンビームの投影データは図3に示すように、1つのX線源から放射状に検出器に到達するように投影をとる。そしてX線源と検出器を同時に回転させて、全方向から投影データを取得する。このファンビームの投影データは、k空間で直接取得することはできない。よってファンビームの投影データからの画像再構成問題は、k空間を考え

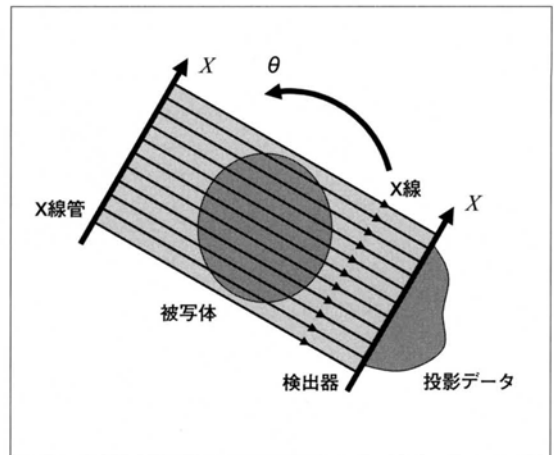


図2. パラレルビームの投影

別刷請求先：〒116-8551 東京都荒川区東尾久7-2-10

首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学域 篠原 広行

TEL：03-3819-1211 FAX：03-3819-1406

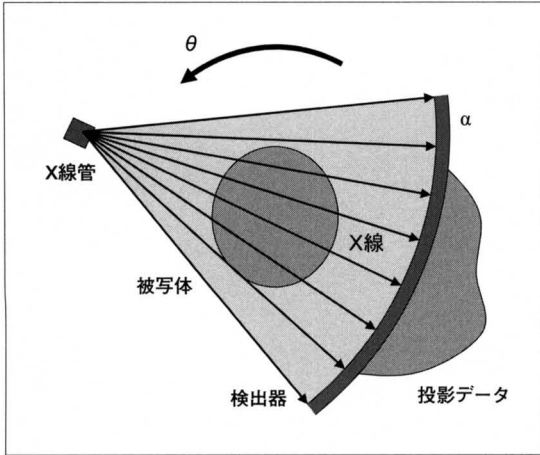


図3. ファンビームの投影

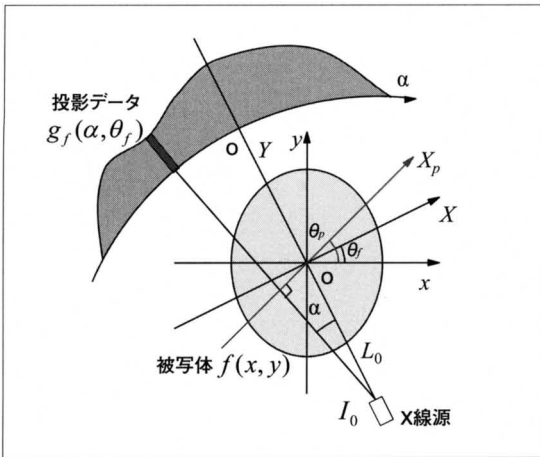


図4. 検出器が扇状に並んだファンビームの幾何学的配置

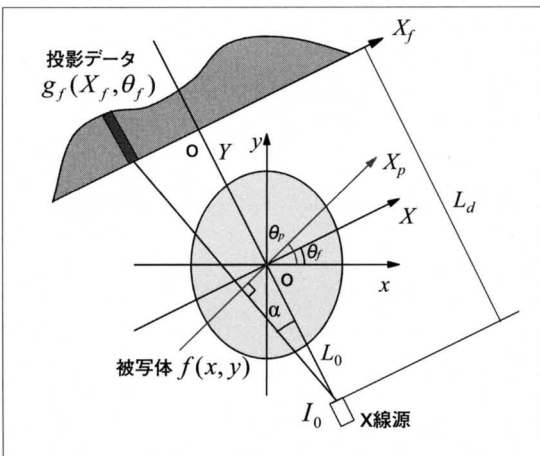


図5. 検出器が直線状に並んだファンビームの幾何学的配置

ず実空間でとられるデータについて考えていく。

ファンビームでの投影の幾何学的配置には2種類あって、図4に示すように検出器が扇状に並んでいるものと、図5に示すように検出器が直線状に並んでいるものがある。

ファンビームの投影を数値シミュレーションで作成する場合は、ファンビームのX線源から検出器までの1つのラインを平行ビームのラインに換算することによって、平行ビームと同じように作成することができる。

図4に示すように検出器が扇状に並んでいる場合のファンビームの投影データを  $g_f(a, \theta_f)$ 、平行ビームの投影データを  $g_p(X_p, \theta_p)$  とし、X線源からファンビームの回転中心(被写体空間の座標軸の原点)までの距離を  $L_0$  とすると、

$$\begin{cases} X_p = L_0 \sin a \\ \theta_p = \theta_f + a \end{cases} \quad (1)$$

と表すことができる。よって投影データの関係は、

$$g_f(a, \theta_f) = g_p(L_0 \sin a, \theta_f + a) \quad (2)$$

となる。図6に示した数値ファントムに対して、平行ビームで作成した投影と検出器が扇状に並んだファンビームで作成した投影のサイノグラムをそれぞれ図7(a)と(b)に示す。平行ビームの投影では、外側の楕円の投影の輪郭が左右対称になっているのに対し、ファンビームの投影では左右非対称になる。このずれは、線源の回転方向の違いによっても異なってくる。(2)式で示した関係は、線源が反時計回りに回転するときのものであるが、逆に時計回りに回転するときの投影データの関係は、

$$g_f(a, \theta_f) = g_p(L_0 \sin a, \theta_f - a) \quad (3)$$

と表される。線源の回転方向が反時計回りとき計回りの投影データをそれぞれ図8(a)と(b)に示す。左右のずれが逆向きになっている。このことより、再構成においてもファンビームの場合は線源の回転方向が重要になる。

また、図5に示すように、検出器が直線状に並んでいる場合のファンビームの投影データを  $g_f(X_f, \theta_f)$ 、平行ビームの投影データを  $g_p(X_p, \theta_p)$  とし、X線

源からファンビームの回転中心（被写体空間の座標軸の原点）までの距離を $L_0$ 、X線源から検出器までの距離を $L_d$  ( $X_f$ 座標軸の中心OとX線源を結ぶ距離) とすると、

$$\begin{cases} X_p = L_0 \frac{X_f}{\sqrt{X_f^2 + L_d^2}} \\ \theta_p = \theta_f + \tan^{-1} \frac{X_f}{L_d} \end{cases} \quad (4)$$

と表すことができる。よって投影データの関係は、

$$g_f(X_f, \theta_f) = g_p(L_0 \frac{X_f}{\sqrt{X_f^2 + L_d^2}}, \theta_f + \tan^{-1} \frac{X_f}{L_d}) \quad (5)$$

となる。図6に示した数値ファントムに対して、パラレルビームで作成した投影と検出器が直線状に並ん



図6. 数値ファントムの画像

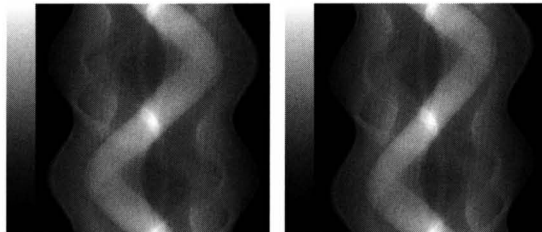


図7. 図4の配置で作成したファンビームの投影データ  
(a) パラレルビームの投影データ  
(b) ファンビームの投影データ (反時計回り)

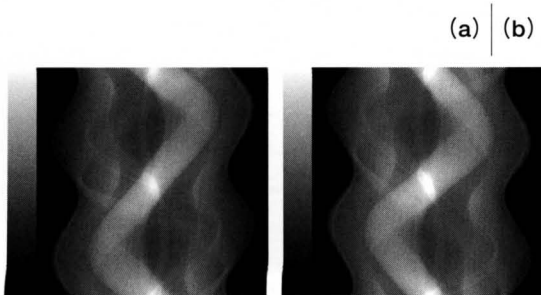


図8. 回転方向を変えたファンビームの投影データ  
(a) 線源が反時計回りの場合の投影データ  
(b) 線源が時計回りの場合の投影データ  
左右のずれ方が逆向きになる。

だファンビームで作成した投影のサイノグラムをそれぞれ図9(a)と(b)に示す。扇状の検出器の場合と比較すると、投影の横方向に多少ずれがある。(5)式は線源が反時計回りに回転するときの投影データの関係であるが、線源が時計回りに回転する場合は、

$$g_f(X_f, \theta_f) = g_p(L_0 \frac{X_f}{\sqrt{X_f^2 + L_d^2}}, \theta_f - \tan^{-1} \frac{X_f}{L_d}) \quad (6)$$

と表される。

## 2. ファンパラ変換と投影再構成法

ファンビームの投影からパラレルビームの投影に変換することをファンパラ変換と呼ぶ。パラレルビームの投影がファンビームの投影のどの位置になるかを図10に示す。ファンビームは検出器が反時計

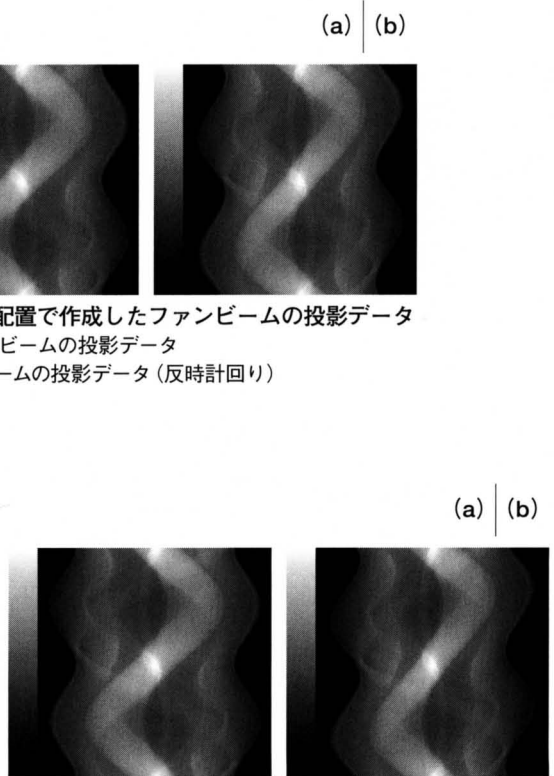


図9. 図5の配置で作成したファンビームの投影データ  
(a) パラレルビームの投影データ  
(b) ファンビームの投影データ (反時計回り)

回りに回転したもので、**図10(a)**は扇形の検出器の場合、**図10(b)**は直線状の検出器の場合を示している。検出器が反時計回りに回転している場合は、平行ビームのデータはファンビーム上で右上がりになっている。これは、**図7**や**図9**を見ても明らかである。

実際のファンパラ変換では、平行ビームの投影データを作成するので、平行ビームの位置がファンビームのどの位置になるかを計算して、その位置のデータをファンビームの近接データから補間することによって求める。よって、線源が反時計回りに回転している場合は、(1)式および(4)式を逆に解くことで計算式が求まる。検出器が扇状に並んでいる場合は、(1)式を $\alpha$ と $\theta_f$ に対して解いて

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha = \sin^{-1} \frac{X_p}{L_0} \\ \theta_f = \theta_p - \sin^{-1} \frac{X_p}{L_0} \end{array} \right] \quad (7)$$

となり、投影データの変換は

$$g_p(X_p, \theta_p) = g_f\left(\sin^{-1} \frac{X_p}{L_0}, \theta_p - \sin^{-1} \frac{X_p}{L_0}\right) \quad (8)$$

となる。また、検出器が直線状に並んでいる場合は、(4)式を $X_f$ と $\theta_f$ に対して解いて

$$\left[ \begin{array}{l} X_f = \frac{L_d X_p}{\sqrt{L_0^2 - X_p^2}} \\ \theta_f = \theta_p - \tan^{-1} \frac{X_p}{\sqrt{L_0^2 - X_p^2}} \end{array} \right] \quad (9)$$

となり、投影データの変換は

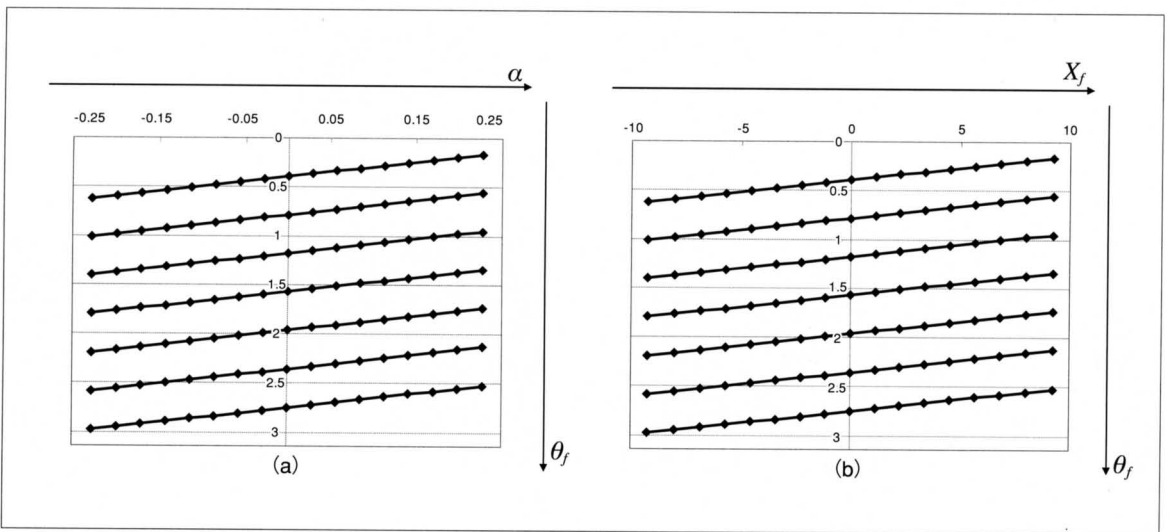
$$g_p(X_p, \theta_p) = g_f\left(\frac{L_d X_p}{\sqrt{L_0^2 - X_p^2}}, \theta_p - \tan^{-1} \frac{X_p}{\sqrt{L_0^2 - X_p^2}}\right) \quad (10)$$

となる。

ファンビームの投影データからファンパラ変換を行って平行ビームの投影データに変換した結果を**図11**に示す。**図11(a)**は検出器が扇状に並んでいる場合で、**図11(b)**は検出器が直線状に並んでいる場合を示している。拡大率の違いによって横方向の大きさが多少異なっているが、左右のバランスは元の平行ビームと同様に左右対称の形に戻っている。ファンビームの投影データを平行ビームの投影データに変換できれば、画像再構成は投影再構成法(FBP法)をそのまま用いることができる。

### 3. ファンビームからの直接再構成法

フーリエ変換に関するよく知られた定理によれば、周波数空間でフィルタ関数 $H(\omega)$ を掛け算すること



**図10.** ファンビームの投影と平行ビームの投影の関係  
(a) 扇状の検出器の場合 (b) 直線状の検出器の場合

は、実空間において、この関数の逆変換

$$h(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega X} d\omega \quad (11)$$

を重畳積分 (convolution integral) することと等価である。したがって、投影再構成法においてk空間でフィルタ関数を掛け算する計算を、変数Xの領域(実空間)で重畳積分により実行することもできる。具体的には、フィルタ関数  $|\omega|$  と一致する関数を  $\Phi(\omega)$  としフーリエ逆変換した関数を  $\phi(X)$  とすれば、k空間でフィルタを掛ける計算は

$$q(X, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X', \theta) \phi(X - X') dX' \quad (12)$$

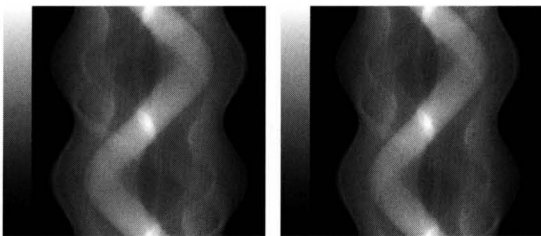
のように表すこともできる。このような投影データに対し実空間で重畳積分によってフィルタリングを実行するようなフィルタ補正逆投影法を、とくに重畳積分法、あるいはコンボリューション法と呼んで

いる。標本化された投影データにおいて、フィルタ関数が帯域制限された  $|\omega|$  のRamachandran-Lakshminarayananフィルタと呼ばれるものを利用する場合、実空間の  $\phi(X_i)$  は、

$$\phi(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{4(\Delta X)^2} & i=0 \\ 0 & i:\text{even} \\ -\frac{1}{i^2 \pi^2 (\Delta X)^2} & i:\text{odd} \end{cases} \quad (13)$$

となる。ここで  $\Delta X$  は標本化したときの  $X_i$  の標本間隔である。このフィルタの周波数空間での形と実空間での形を図12に示す。

ファンビームの投影データに対しファンパラ変換を用いずに直接再構成する場合は、この重畳積分法を利用する。この手法は計算が複雑なので、簡単な手順にして紹介する。この手順も扇状の検出器の



(a) (b)

図11. ファンパラ変換で平行ビームの投影に変換した投影データ  
(a) 検出器が扇状に並んでいる場合のファンビームから平行ビームに変換した投影データ  
(b) 検出器が直線状に並んでいる場合のファンビームから平行ビームに変換した投影データ

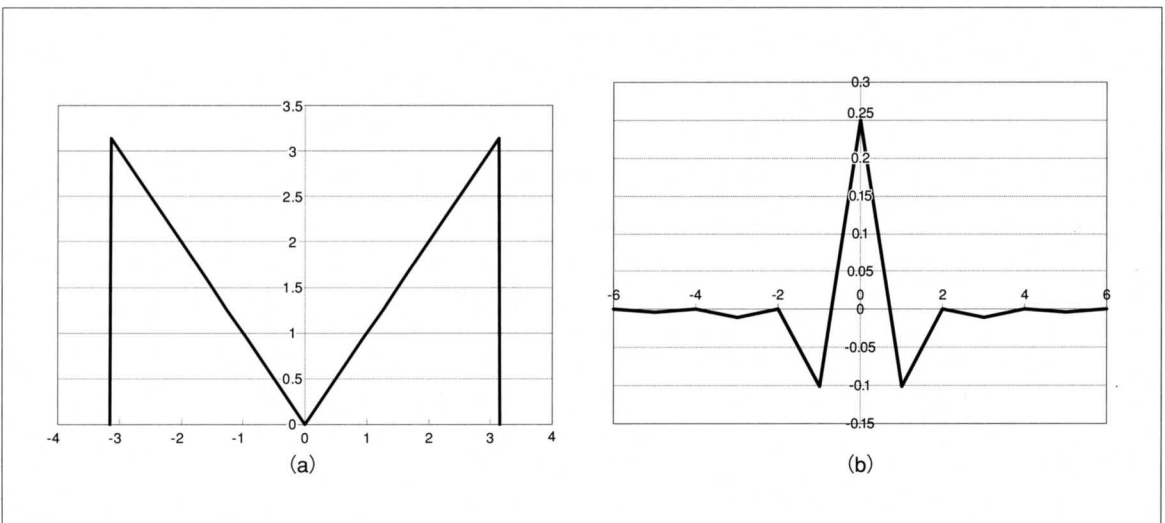


図12. Ramachandran-Lakshminarayananフィルタの形状  
(a) 周波数空間 (k空間) での形状 (b) 実空間での形状

場合と直線状の検出器の場合とで式が若干異なってくるので、両方の場合に分けて解説する。

検出器が扇状の場合

手順1：ファンビームの投影データに  $L_0 \cos a$  を掛ける

手順2：Ramachandran-Lakshminarayanan フィルタに  $(a/\sin a)^2$  を掛けたものを投影データに重畳する（フィルタ補正にあたる）

手順3：フィルタ補正した投影データを以下の式で重み付けして逆投影する

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{w_1(x, y, \beta)^2} g_f'(a, \beta) d\beta \quad (14)$$

ここで、 $\beta = \theta_f - a$  で

$$w_1(x, y, \beta) = \sqrt{\{L_0 + t \sin(\beta - \phi)\}^2 + \{t \cos(\beta - \phi)\}^2}$$

$$\begin{cases} x = t \cos \phi \\ y = t \sin \phi \end{cases} \quad (15)$$

である。

検出器が直線状の場合

手順1：ファンビームの投影データに

$L_0 / \sqrt{L_0^2 + X_f^2}$  を掛ける

手順2：Ramachandran-Lakshminarayanan フィルタを投影データに重畳する（フィルタ補正にあたる）

手順3：フィルタ補正した投影データを以下の式で重み付けして逆投影する

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{w_2(x, y, \beta)^2} g_f'(X_f, \beta) d\beta \quad (16)$$

ここで、 $\beta = \theta_f - \tan^{-1} \frac{X_f}{L_d}$  で

$$w_2(x, y, \beta) = \frac{L_0 + t \sin(\beta - \phi)}{L_0}$$

$$\begin{cases} x = t \cos \phi \\ y = t \sin \phi \end{cases} \quad (17)$$

である。

この重み付け重畳積分法でファンビームから直接再構成が可能である。実際にはファンパラ変換を行った方が計算時間においても有利なのでファンパラ変換が使われることが多い。しかし、この考え方は3次元のコーンビーム再構成に応用されている。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度～平成22年度首都大学東京共同研究費（富士フィルムRIファーマ株式会社）、および平成21年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

### 複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会  
〒107-0052 東京都港区赤坂9-6-41 乃木坂ビル3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

### Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619