



断層映像法の基礎 第31回 繰り返しを利用した画像再構成

篠原 広行¹⁾、今門 隼也人¹⁾、橘 篤志¹⁾、寺松 翔太¹⁾、橋本 雄幸²⁾

¹⁾ 首都大学東京人間健康科学研究科 放射線科学域

²⁾ 横浜創英短期大学 情報学科

はじめに

CTやMRIの画像再構成で使われているフーリエ変換法やFBP法のような解析的に直接再構成する方法は本講座の第13回で解説した。画像再構成法にはその解析的な方法のほかに、繰り返しを利用して徐々に解に近づけていく方法があり逐次近似画像再構成法と呼ばれている。本稿では繰り返しを利用した方法の考え方と具体的な方法を解説する。また、その方法を利用した数値シミュレーションの結果についても紹介する。

1. 繰り返しを利用した方法
2. 投影と逆投影
3. 代数的画像再構成法 (ART法とSIRT法)

1. 繰り返しを利用した方法

これまで紹介してきた画像再構成法は解析的な方法で、数式を用いて解法を導き出しその数式にしたがってコンピュータで計算して画像を求めるものである。その解析的な方法の一般的な手順は、計算の道具である数式を実際の計測に合わせて定式化するところから始まる。このような計測を定式化することを順問題という。また、定式化した順問題の式から逆に式を解くことを逆問題という。この順問題と逆問題の関係は、簡単な算数の問題でも行われている。そこで簡単な例について考えてみよう。

「1個50円のペンを何個か購入したら500円になった。」という事例があったとする。この場合、1個が50円というのは元々分かっていることであり、購入した金額の500円が計測されたデータである。何個購入したか分からないのでそれを x と置くと今回の事例を次式のように定式化することができる。

$$50x=500 \quad (1)$$

これが順問題である。この式から逆に x を求めるように解くのが逆問題である。これは簡単な方程式なので、私たちは x を求めるのに両辺を50で割ればよいということを知っている。よって、この逆問題の解法は「計測データを50で割る」ということになる。一度解ければ計測データが500円以外であっても同じ「50で割る」という方法で解くことができる。これが解析的な方法である。

計測データを y とおいて順問題の式を一般的な形に書き換えると

$$y=50x \quad (2)$$

となる。これを x について解析的に解いた式は

$$x=\frac{y}{50} \quad (3)$$

となる。これらの様子を入力と出力という形で示す

連絡先：〒116-8551 東京都荒川区東尾久7-2-10
首都大学東京人間健康科学研究科放射線科学域 篠原 広行
TEL：03-3819-1211 FAX：03-3819-1406

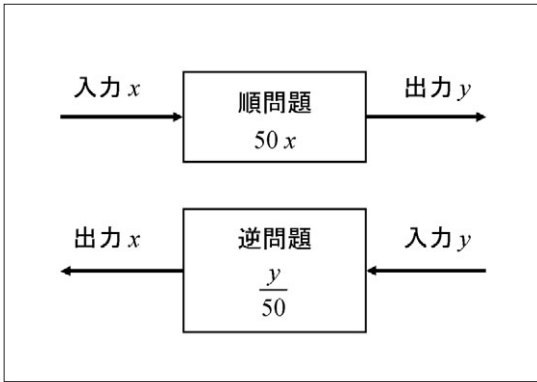


図1. 順問題と逆問題の関係

と図1のようになる。

今度は、方程式を解く方法を私たちは知らない
と仮定しよう。(1)式の順問題の式は分かっている
が、その式から x を直接求める方法は分からない。
この場合、まず考えられるのは x に適当な数字を
当てはめて順問題の式が成り立つときの x の値を
探していくという方法であろう。単純に x の値を
「1, 2, 3, …」と変えていって最も近いところを探
していく方法もあるが、もう少し一般的で効率の
いい方法を考えてみる。例えば x に初期値として
1を当てはめてみると、左辺が50で右辺が500とな
り両辺で450の差分が出る。その差分を利用して
次の x を決めることを考える。これは制御でよく
用いられるフィードバックの考え方である。フィ
ードバックの方法はいろいろ考えられるが、差分に
1/100を掛けて戻す(初期値に加える)ことを考
えてみる。すると、次の x の値は、 $1+4.5=5.5$ となる。
この手順を繰り返していくとどのようになるであ
ろうか。このフィードバックの様子は図2のよう
になる。入力は x の値で、系は x に50を掛けると
いう順問題になり、出力はその結果の y となる。そ
の y の値を用いて計測データである500からの差
分に1/100を掛け算したものをフィードバックし
ている。次にこの手順を数式で表してみる。 k 番
目の x の値を $x^{(k)}$ 、次の $k+1$ 番目の x の値
を $x^{(k+1)}$ とするとこの手順は

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{500 - 50 \cdot x^{(k)}}{100} \quad (4)$$

と表せる。 $50 \cdot x^{(k)}$ が k 番目の x に対する順問題の

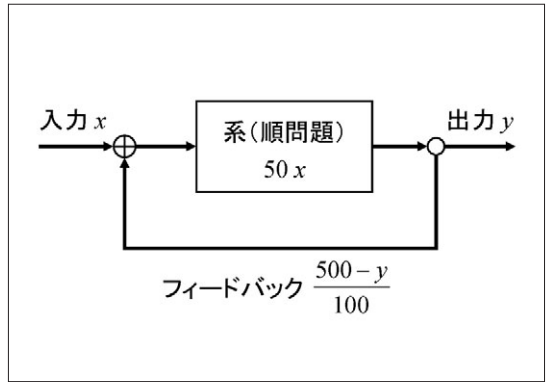


図2. フィードバックの様子

式を表している。この順問題の計算値と計測データ
である500との差分を計算し、100で割った値を
 k 番目の x の値に加えて $k+1$ 番目の x の値を
作成している。この式を用いた x の値の推移を
Excelで計算し、グラフにしたものを図3に示す。
回数を重ねるごとに徐々に(1)式の解である10
に近づいている。このように方程式を解くとい
う逆問題を使わずに、順問題だけで繰り返しなが
ら解に近づける方法が繰り返しの方法である。

繰り返しの方法では必要になる事柄は少なくとも
2点あることが今回の例から分かる。1点目は順
問題の定式化である。私たちが問題を解くとき
に使う道具は数式なので、いずれの方法をとるに
しても問題を定式化しなければならない。2点
目はフィードバックの方法である。今回の例で
は「差分に1/100

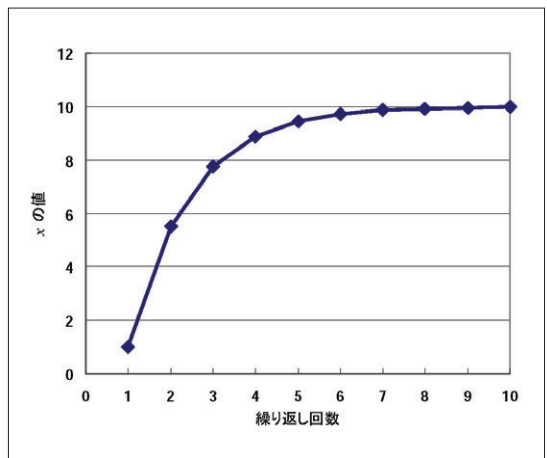


図3. 「差分に1/100を掛けてから加える」というフィードバックを行って繰り返した結果

を掛けてから加える」という方法をとった。フィードバックの方法によってはうまく解に到達しない場合も考えられる。例えば「差分に1/20を掛けてから加える」とした場合

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{500 - 50 \cdot x^{(k)}}{20} \quad (5)$$

となるが、これをExcelで実行すると図4に示すように値が発散してしまう。このように繰り返しの方法においては、フィードバックに十分注意を払う必要がある。

2. 投影と逆投影

本節ではX線CTの順問題を考える。計測対象はX線を照射する被写体の線減弱係数となり、計測データはX線が被写体を透過して反対側の検出器で計測されるX線の強度である。照射するX線の強度は一定とし被写体の線減弱係数は位置に依存した分布をもつとする。照射するX線の強度を I_0 、計測されるX線の強度を I 、2次元の被写体分布を $f(x, y)$ とすると順問題は

$$I = I_0 \exp\left(-\int_l f(x, y) dl\right) \quad (6)$$

と表すことができる。ここで、 l はX線が通過した

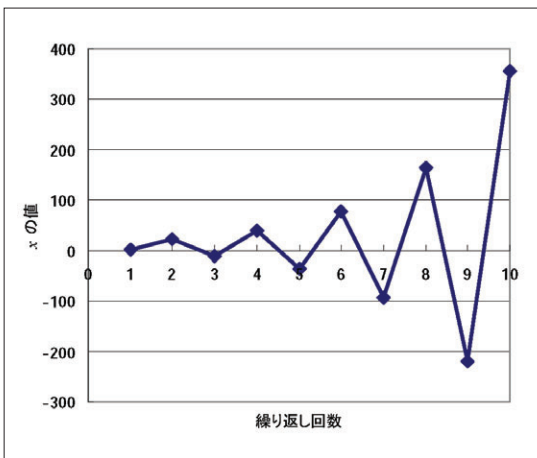


図4. 「差分に1/20を掛けてから加える」というフィードバックを行って繰り返した結果

直線の経路を表す。その様子を図5に示す。被写体に照射されたX線は被写体内で減弱する。その減弱割合は、X線の経路に沿って被写体の線減弱係数 $f(x, y)$ を積分した(足し合わせた)値に負記号を付け自然対数 e のべき乗(\exp の演算)にしたものである。ただし、2次元の線減弱係数分布を考えているので、X線CTの場合は被写体に対して全領域を覆うようにスキャン(X線源と検出器を平行移動して計測)し、さらにそれを1回転して計測する。その様子を座標系も加えて図6に示す。被写体のある固定された座標系を x - o - y として、その座標系

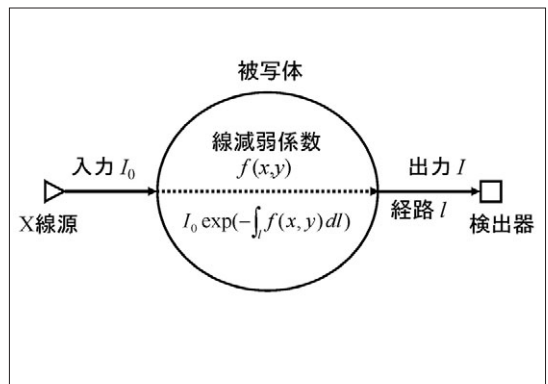


図5. X線源からX線を被写体に照射して、反対側の検出器でX線の強度を検出している様子

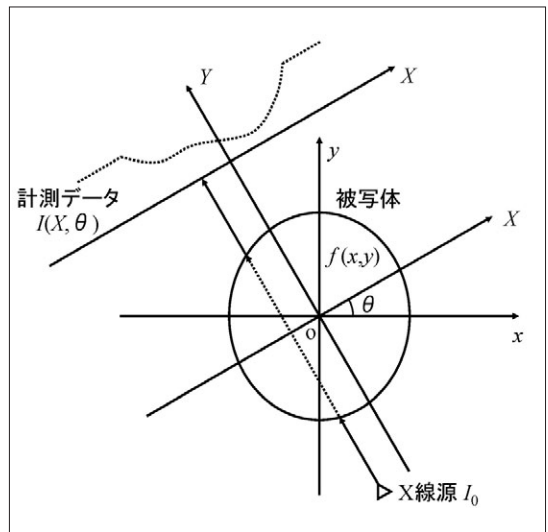


図6. X線CTの計測の様子を、座標系を含めて図示したもの

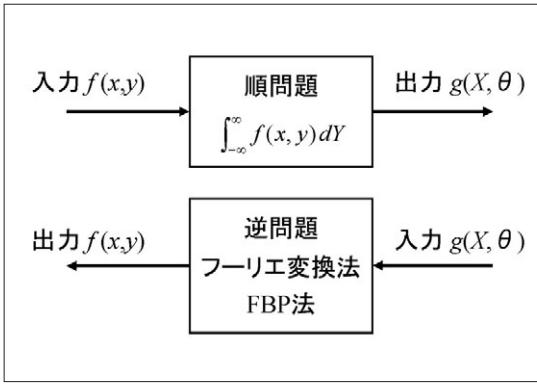


図7. X線CTの順問題と逆問題

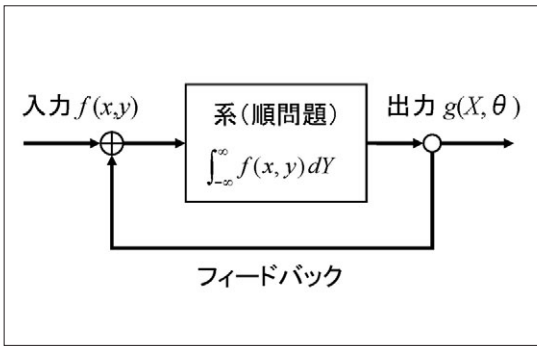


図8. X線CTにおける繰り返しの方法

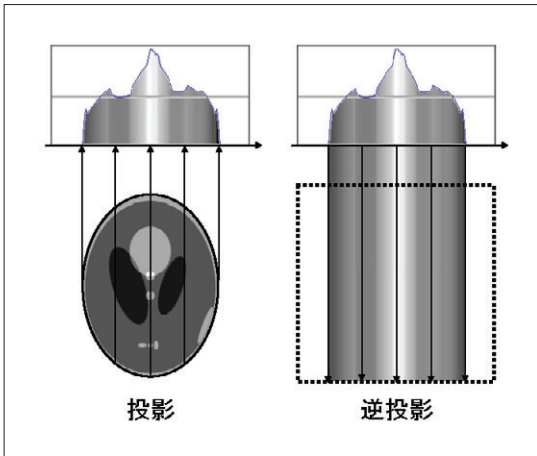


図9. ある角度における投影と逆投影の模式図

から角度 θ 回転した座標系を X-o-Y とする。その回転した座標系の Y 軸に沿って強度 I_0 の X 線を照射して計測したデータを $I(X, \theta)$ とする。計測データはスキャンと回転をして計測されるので X と θ に関する 2 次元データとして次式で表すことができる。

$$I(X, \theta) = I_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY\right) \tag{7}$$

線減弱係数の積分経路は Y 軸に沿って $-\infty$ から ∞ までとする。これが順問題の式となるが、この式では \exp などが入って少々複雑なので X 線の初期強度 I_0 が既知であるということから一般的には以下のように変形する。

$$\frac{I(X, \theta)}{I_0} = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY\right) \tag{8}$$

両辺の自然対数を取り

$$\ln \frac{I(X, \theta)}{I_0} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \tag{9}$$

右辺を正にするため左辺の上下を入れ替える。

$$\ln \frac{I_0}{I(X, \theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \tag{10}$$

(10) 式の左辺を $g(X, \theta)$ と置くと次式が得られる。

$$g(X, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \tag{11}$$

ここで $g(X, \theta)$ は計測データ $I(X, \theta)$ と I_0 の比を対数変換したもので投影あるいは投影データと呼ぶ。この (11) 式は原画像 $f(x, y)$ を線積分によって投影に変換するものでラドン変換という。この

ラドン変換は線減弱係数を Y 軸に沿って線積分した形になっている。X線CTでは、このラドン変換を順問題とする。この順問題では入力が $f(x,y)$ で出力が $g(X,\theta)$ ということになる。すると、順問題と逆問題の関係は図7のように表すことができる。解析的な方法で逆問題を解いたものにフーリエ変換法やFBP法がある。

次に逆問題を解いた解析的な方法が分からないものとして、これを繰り返しの方法に当てはめると図8のようになる。順問題は定式化しているので、ここで問題となるのはフィードバックの方法である。このフィードバックに使われる手法の1つである逆投影の考え方について解説する。

投影データは被写体 $f(x,y)$ をスキャンと回転をしながら線積分して求める。逆投影とは次式のように投影データを被写体の方向に向かって直線状にデータを加えていく操作である。

$$f'(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(X,\theta) d\theta \quad (12)$$

図9に1つの角度に関する投影と逆投影の模式図を示す。投影では線積分が投影データの値となり、逆投影では投影データの値がそのまま直線状に画像領域に加えられる。投影と逆投影を0度、45度、90度のみで行った例を図10(a)、(b)に示す。図10(a)では、被写体の画像から0度、45度、90度の投影を作成している様子を示している。図10(b)では、その3つの投影から逆投影している様子を示している。この投影と逆投影を360度で256方向から行った様子を図11に示す。投影データは横方向をスキャンの X 方向、縦方向を回転の θ 方向とするサイノグラムとして表示する。逆投影した画像は非常にぼけている。解析的な方法であるFBP法では、このぼけをフィルタ処理で除去してから逆投影をすることで真の画像を作成している。

3. ART法とSIRT法

X線CTの画像再構成において繰り返しの方法を用いる概念と道具が揃ったので、本節では最も単純な繰り返しの方法を紹介する。X線CTの順問

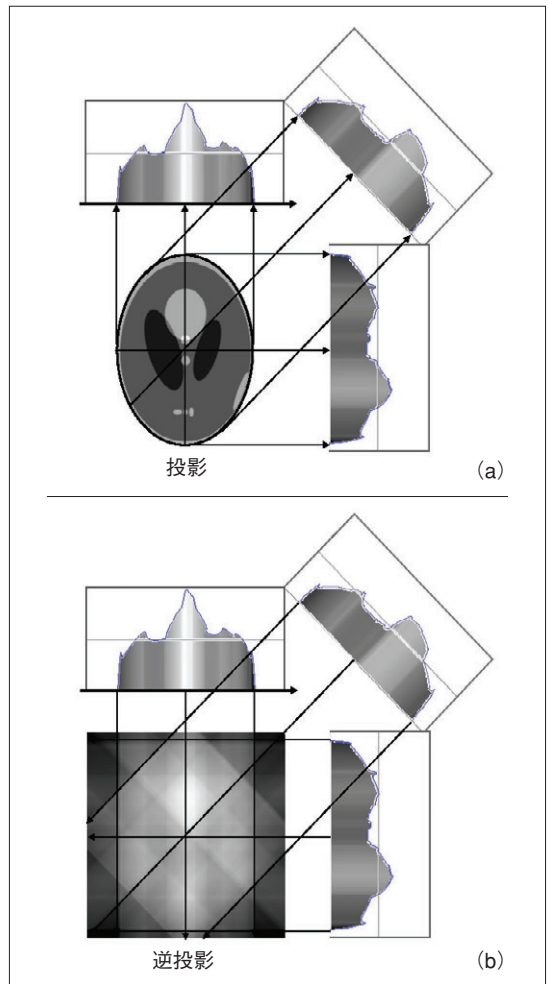


図10. 0度、45度、90度における投影と逆投影
(a) 投影の様子 (b) 逆投影の様子

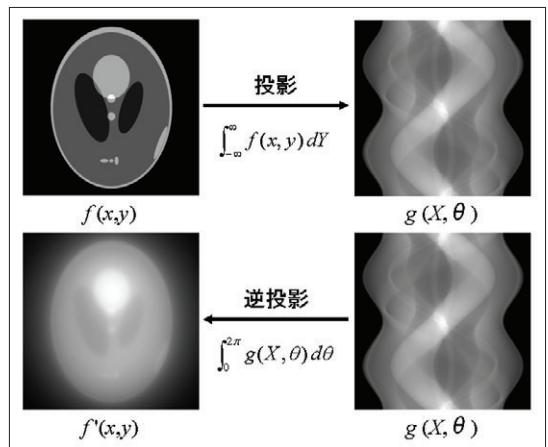


図11. 360度で256投影を使って投影と逆投影の様子を表したもの

題は解決しているのに、繰り返しを用いるためのフィードバックの方法を考える。その方法は逆投影を利用するが、基本的には「ペンを何個購入したか」のときに使った方法とさほど変わらない。ペンを購入したときに分かっていた支払った金額の500円に相当するのが投影データとなる。

はじめに適当に予想した画像を作成しておき順問題である投影処理を行う。投影処理の結果と計測から分かっている投影データの差分を求め、それを逆投影してもとの画像に戻す(加える)。この手順をフィードバックの図で示すと、**図12**のようになる。k番目の画像を $f(x,y)^{(k)}$ とし、k+1番目の画像を $f(x,y)^{(k+1)}$ としたとき、この繰り返しの方法は次式で表される。

$$f(x,y)^{(k+1)} = f(x,y)^{(k)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{g(X,\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{(k)} dY\} d\theta \quad (13)$$

ここで投影と逆投影を1つの角度ごとに行って画像を更新していく方法を ART (algebraic reconstruction technique) 法、投影と差分の逆投影をすべての角度で行ってから画像を更新して

いく方法を SIRT (simultaneous reconstruction technique) 法と呼ぶ。ART 法では、1つの角度ごとに画像を更新していくので収束は速くなるが、画像の値が発散してしまう可能性が多少高くなる。逆に SIRT 法は、すべての角度で投影と差分の逆投影を行ってから画像を更新するので収束は遅くなるが、値が発散する可能性は ART 法に比べて低くなる。(13)式のまま実行すると値が発散してしまう。最初に解説したペンの例で示したように100で割ったものを戻した場合は発散しなかったが20で割った場合は発散してしまった。そこで(11)式でも同じようにk番目の $f(x,y)$ にフィードバックを加える前に適当な値で割って小さくしておく発散を抑えることができる。数値シミュレーションでは次式のようにフィードバックの際に2000で割ってから戻すようにした。

$$f(x,y)^{(k+1)} = f(x,y)^{(k)} + \frac{1}{2000} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{g(X,\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{(k)} dY\} d\theta \quad (14)$$

ART法の数値シミュレーションの結果を**図13**に示す。初期画像はすべて同じ値の画像とした。ART

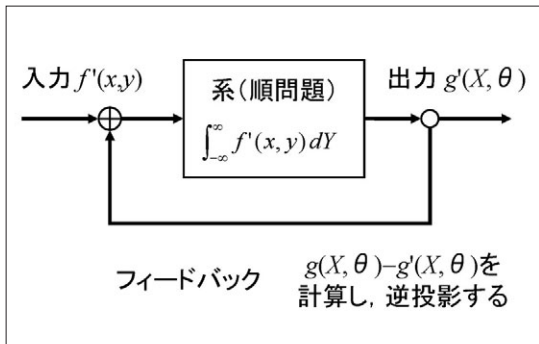


図12. X線CTの繰り返し方法をフィードバックの図で示したもの

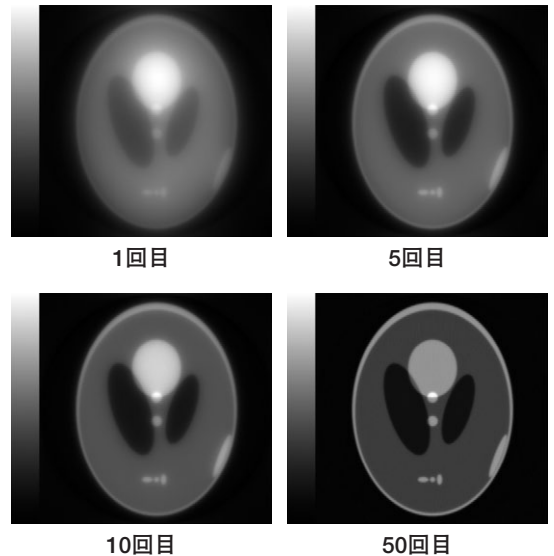


図13. ART法の数値シミュレーション結果

法は1投影ごとに画像を更新するが、SIRT法の更新回数に合わせるため、**図13**では全投影で更新が終わった時点をも1回として更新回数を示している。また、SIRT法の結果を**図14**に示す。初期画像はART法と同様にすべて同じ値の画像とした。両者とも徐々に元の画像に近づく様子が見られる。画像を見た限りでは、ART法もSIRT法も違いが分からないので、再構成画像の評価値をプロットしたグラフを**図15**に示す。画像の評価には、元となる数値ファントムとそれぞれの再構成画像の各画素の差を絶対値にして平均をとったもの(平均絶対誤差)を用いた。**図15**のグラフを見ると、ART法の収束が多少速くなっている。それほど両者に差が出ていないのは、2000で割ることで収束をゆるやかにするように調整しているためだと考えられる。次回は、繰り返しの方法で現在最も多く用いられているML-EM法とOS-EM法を解説する。

謝辞：本研究で使用したプログラムの開発は平成17年度～平成22年度首都大学東京共同研究費(富士フィルムRIファーマ株式会社)、および平成22年度首都大学東京傾斜的配分研究費によるものである。

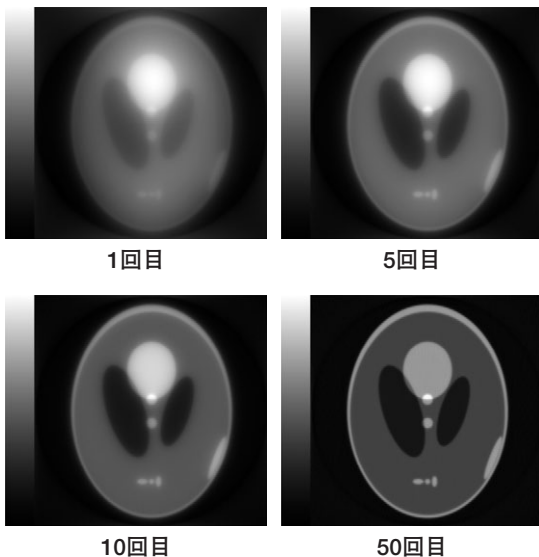


図14. SIRT法の数値シミュレーション結果

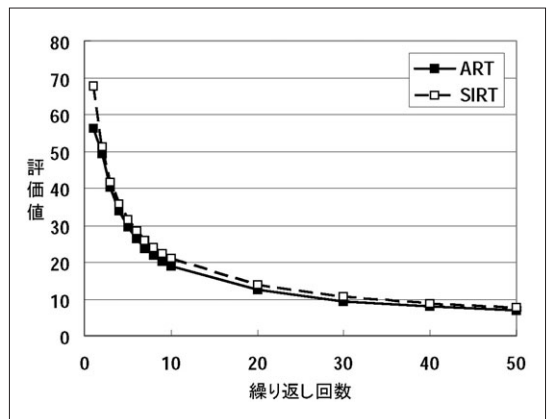


図15. ART法、SIRT法の平均絶対誤差と繰り返し回数(更新回数)

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会

〒107-0052 東京都港区赤坂 9-6-41 乃木坂ビル 3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619