連続講座

断層映像法の基礎　第 36 回
ラドン空間とコーンビーム

篠原　広行[1)]、陳　欣胤[2)]、中世古　和真[3)]、橘　篤志[4)]、橋本　雄幸[5)]

1) 首都大学東京
2) 首都大学東京人間健康科学研究科
3) 東邦大学医療センター大橋病院放射線部
4) 東京慈恵会医科大学附属病院放射線部
5) 横浜創英大学こども教育学部

はじめに

第 35 回では、3 次元コーンビームを回転させながら被写体をスライドさせて連続的に計測するヘリカルコーンビーム再構成について解説した。今回は、ラドン空間とコーンビームを利用した再構成の条件について解説する。

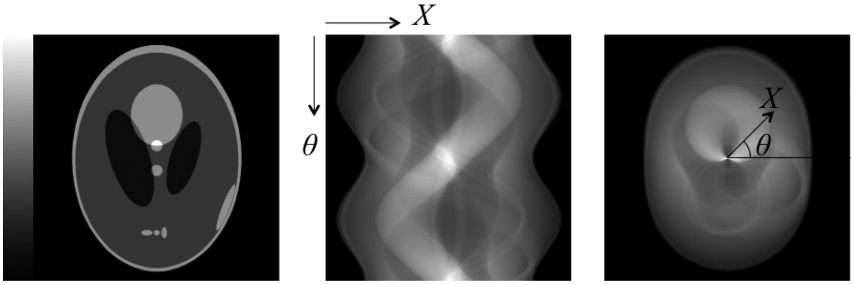
1. ラドン空間
2. ファンビームの条件
3. コーンビームの条件

1. ラドン空間

CT のデータ取得は対象となる被写体の投影を撮ることである。その投影データは一般的に被写体の線積分で表される。それがよく知られているラドン変換である。ラドン変換の式は、

$$g(X,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{1}$$

となる。ここで f (x,y) は対象の 2 次元の被写体を表す関数で、g (X, θ) はその線積分である投影データを表す。この g (X, θ) の空間をラドン空間と呼ぶ。被写体が**図 1 (a)** に示す Shepp ファントムの場合、その投影データ g (X, θ) は**図 1 (b)** に示すようになる。**図 1 (b)** はサイノグラムと呼ばれ、ラドン空間の X 方向を横軸に、θ 方向を縦軸に表したものである。ラドン空間は角度方向を持っているので極座標で表すことができる。**図 1 (b)** を極座標で表したものを**図 1(c)**に示す。**図 1(c)**では極座標の動径方向を X、角度方向をθで表している。この極座標表示では、原点の値が確定できない特異点となる。



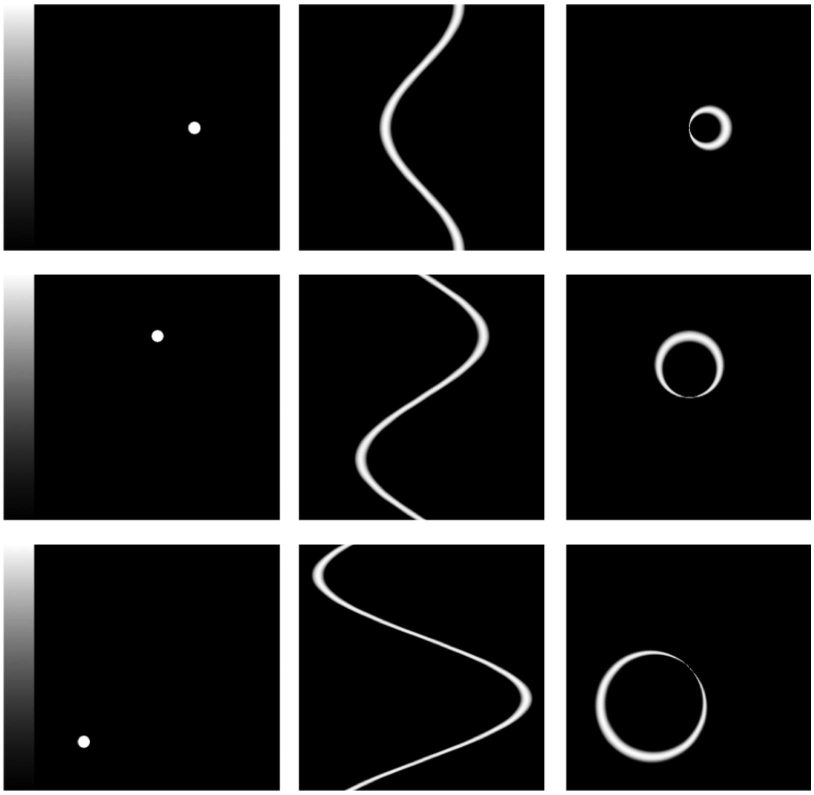
a | b | c

図 1.　Shepp ファントムと投影データ
(a) Shepp の数値ファントム：f(x,y)
(b) 投影データ（サイノグラム）：g(X, θ)
(c) ラドン空間（極座標）：g(X, θ)

連絡先：首都大学東京　篠原 広行

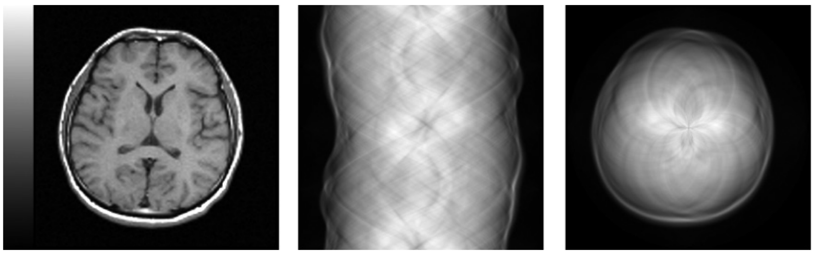
小さな円の画像が、サイノグラムとラドン空間の極座標表示でどのようになるかを**図2**に示す。**図2(a), (d), (g)** は原画像、**図2 (b), (e), (h)** はぞれぞれのサイノグラム、**図2 (c), (f), (i)** はそれぞれの極座標表示を示している。サイノグラムで正弦曲線になるものが極座標表示では原点を通る１つの円を描くようになる。また、そのラドン空間に描き出された円の方向が原画像の小さな円の方向を向いており、原点から最も離れたところが原画像の小さな円が存在している位置に相当する。

頭部の画像とサイノグラム、ラドン空間の極座標表示の画像を**図3**に示す。ラドン空間の画像では、原点を通る様々な大きさと方向の円が寄せ集まっている様子が見られる。また、ラドン空間の外側の輪



a	b	c
d	e	f
g	h	i

図2.　小さな円の画像のサイノグラムとラドン空間
(a), (d), (g) 原画像　　(b), (e), (h) サイノグラム　　(c), (f), (i) ラドン空間（極座標）



a	b	c

図3.　頭部の画像のサイノグラムとラドン空間
(a) 頭部の画像　　(b) サイノグラム　　(c) ラドン空間（極座標）

郭が頭部の原画像の輪郭と同じような形をしている。
　ラドン空間と被写体空間、周波数空間との関係を**図 4** に示す。**図 4** は投影切断面定理（中央切断面定理）と呼ばれる CT の画像再構成に使われる定理を表している。極座標で表したラドン空間と原画像を 2 次元フーリエ変換した周波数空間の関係を**図 5** に示す。極座標で表したラドン空間の原点を通る直線上の値を 1 次元フーリエ変換すると、被写体空間を 2 次元フーリエ変換した周波数空間の同じ場所の値に一致する。ラドン空間がすべて取得されていれば、周波数空間の値をすべて算出することができるので、完全な再構成が可能になる。ラドン空間を極座標で表すと周波数空間と場所が一致するので、完全な再構成が可能かを判断しやすくなる。

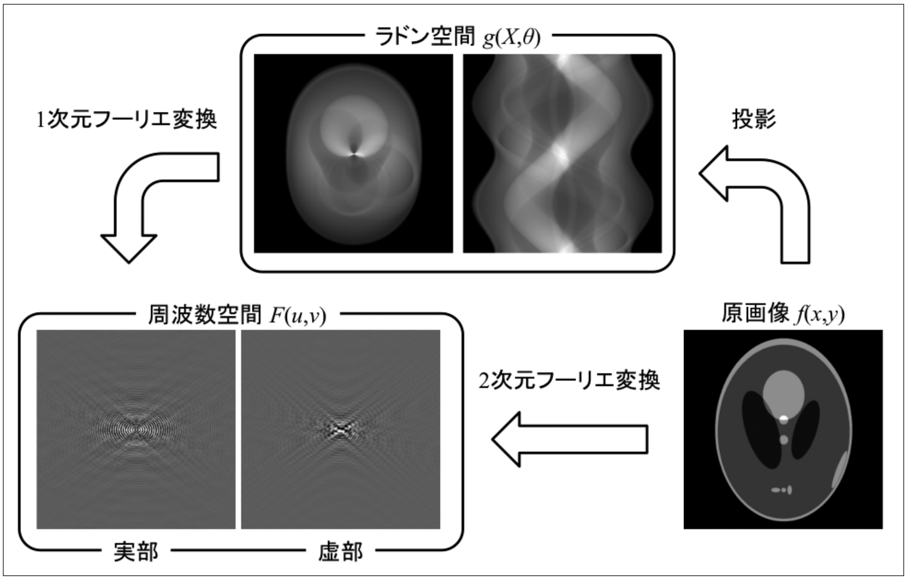


図 4.　投影（中央）切断面定理

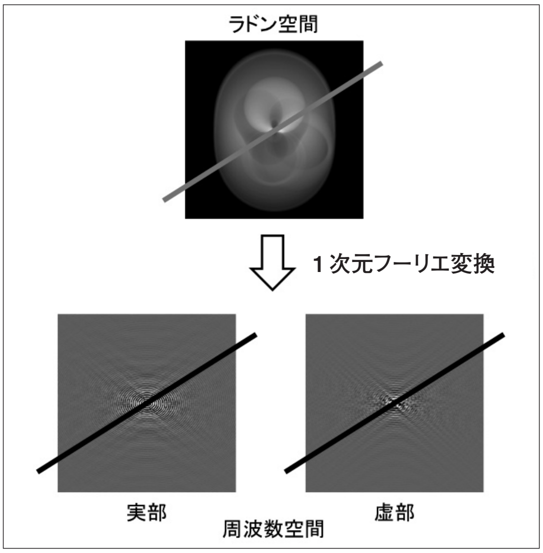


図 5.　極座標で表したラドン空間と原画像を 2 次元フーリエ変換した周波数空間の関係
ラドン空間の原点を通る直線上の値を 1 次元フーリエ変換すると被写体の周波数空間の同じ場所の値になる

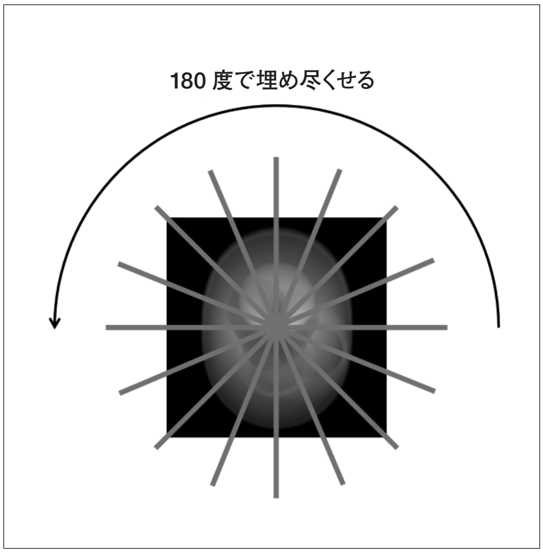


図 6.　パラレルビームの投影とラドン空間
パラレルビームの投影はラドン空間の極座標では原点を中心として放射状に取得される。180 度の投影があれば、ラドン空間を埋め尽くすことができる

2. ファンビームの条件

パラレルビームの投影は、ラドン空間において原点を中心に放射状に取得していることになる。その様子を**図6**に示す。放射状に細かく投影データを取得することによって、ラドン空間をデータで充填することができ、完全な再構成が可能となる。原点を通る直線は、180度回転させるとラドン空間すべてを塗りつぶすことができるので、180度の投影で完全な再構成ができる。

次に、ファンビームで取得した投影がラドン空間ではどのようになるかを見ていく。ファンビームの投影データは検出器が直線の場合、

$$g(X,\beta)=\int_l f(x,y)\,dl \tag{2}$$

となる。ここで $f(x,y)$ は対象の2次元の被写体を表す関数で、$g(X,\beta)$ はそのファン状の線積分である投影データを表す。積分経路 l は線源から対応する1つの検出器までの直線を表す。このとき1つの投影がラドン空間では**図7**に示すように取得される。そのデータは、ファンビームの線源を中心として、ラドン空間の原点を通る円弧状になる。ラドン空間

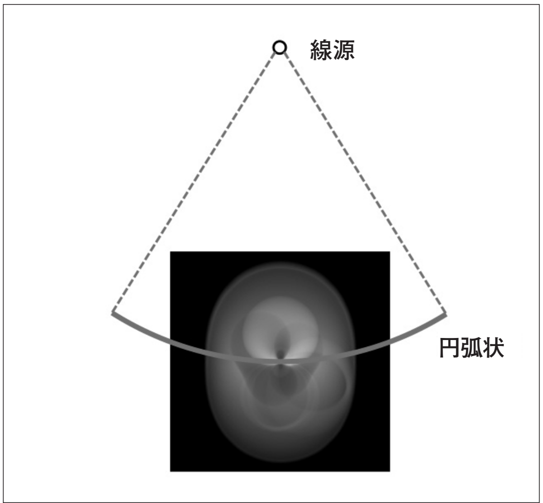


図7. ファンビームの1つの投影から得られるラドン空間のデータ位置

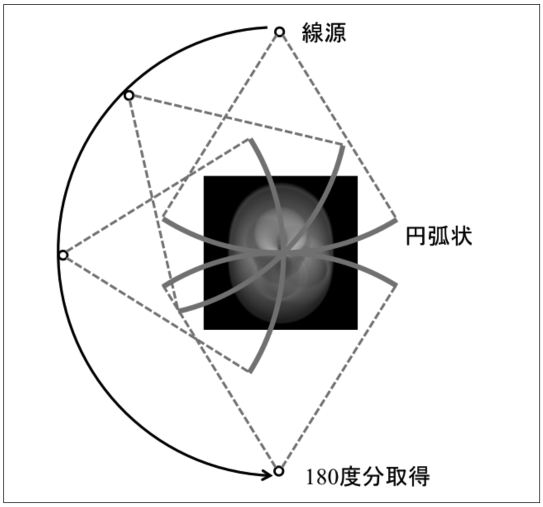


図8. ファンビームで180度分だけ投影を取得した場合のラドン空間の様子

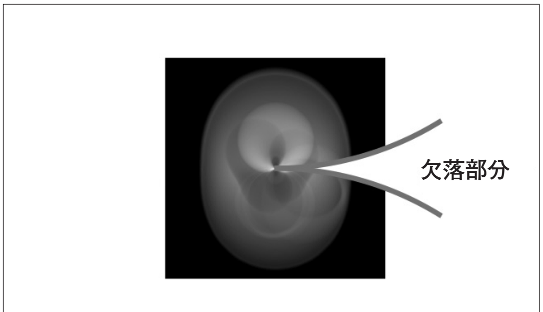


図9. ファンビームで180度分だけ投影を取得した場合のラドン空間上の欠落部分

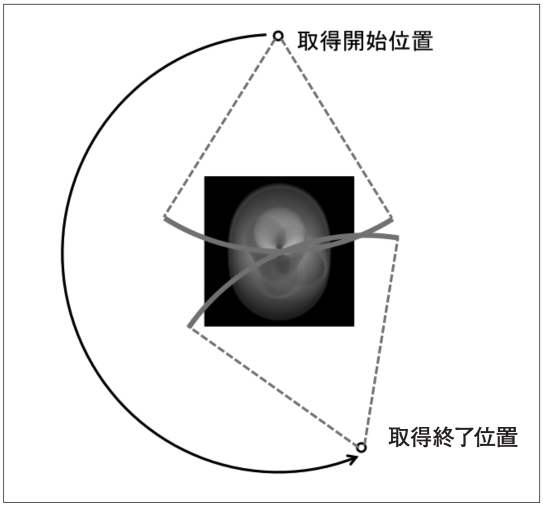


図10. ファンビームで完全な再構成が可能な最低条件

内の円弧状の取得は、検出器配列の形状によらず直線状の検出器でも円弧状の検出器でも同様となる。ファンビームで 180 度分だけ投影を取得した場合のラドン空間の様子を**図 8** に示す。180 度分の投影では、**図 9** に示すようにラドン空間の一部が欠落する。これは、ファンビームでは 180 度以上のデータを取得しないと完全な再構成ができないことを意味している。**図 9** に示した欠落部分のデータが取得できれば、ラドン空間をすべて覆うことができるので、**図 10** に示すように 360 度のデータがなくても完全な再構成は可能である。

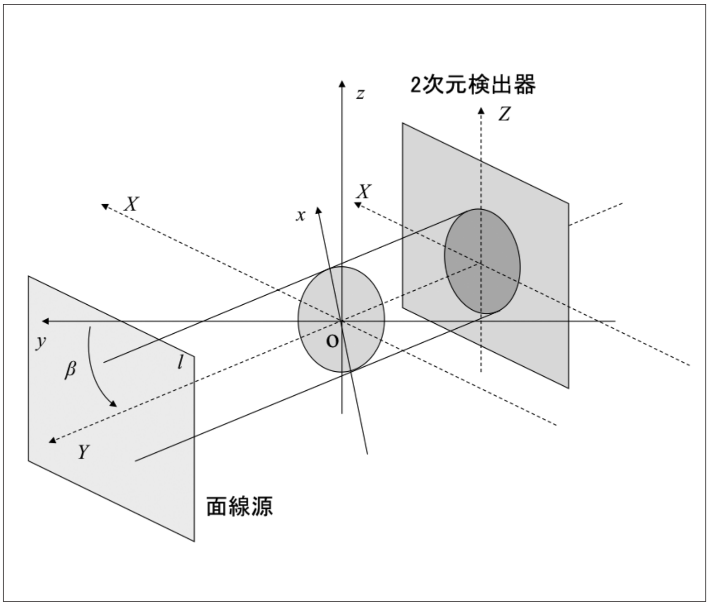


図 11. 3 次元パラレルビーム投影の幾何学的配置

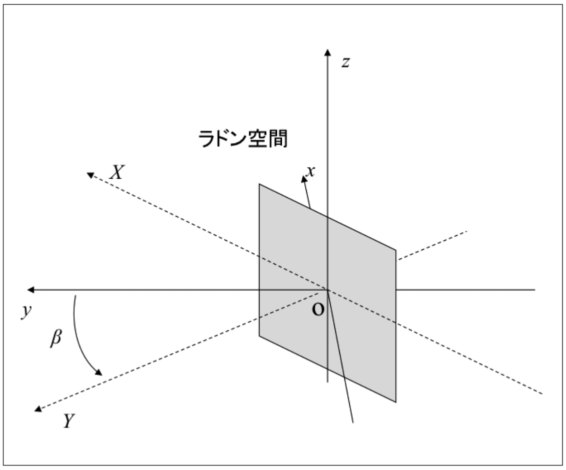


図 12. 3 次元パラレルビームの 1 つの投影とラドン空間

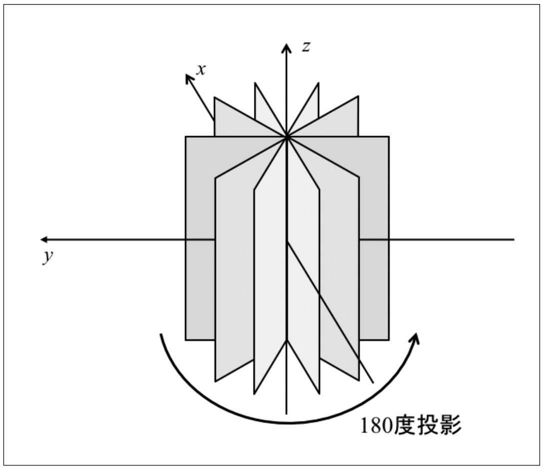


図 13. 3 次元パラレルビームの 180 度投影とラドン空間

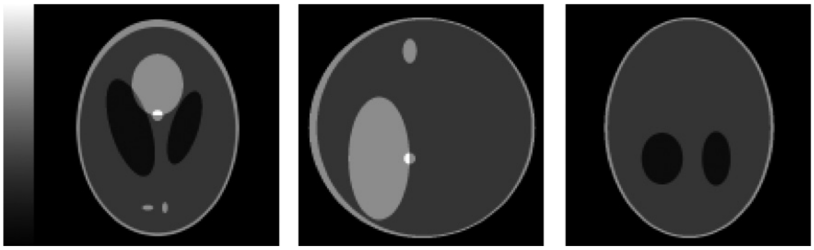


図 14. 3 次元数値ファントム（128 × 128 × 128 画素）

楕円体を組み合わせて作成したもの。本文の x = y = z = 0 は符号付きの数学座標を意味し、下記の座標は 128 × 128 × 128 画素内での 3 軸の配列座標（0 から 127）を示す。数学座標の原点は配列座標では（64, 64, 64）であり、z = 80 は原点よりも 16 画素だけ下の断面になる。図 15，23，26，28 についても同様である。

(a) 座標（64, 64, 80）を通る xy 断面（横断面）
(b) 座標（64, 64, 80）を通る yz 断面（矢状面）
(c) 座標（64, 64, 80）を通る xz 断面（冠状面）

3. コーンビームの条件

3 次元の再構成では、3 次元のラドン空間がすべて満たされていれば完全な再構成が可能である。仮想的な平行光線を出す面光源を考えると、3 次元のパラレルビームは**図 11** のように示される。そのときの 1 つの 2 次元の投影は、ラドン空間では**図 12** に示すように z 軸を通る 1 つの平面になる。これを 180 度回転させて投影を取得すると**図 13** に示すようにラドン空間を満たすことができる。**図 14** に 3 次元の数値ファントムを示す。このファントムのパラレル

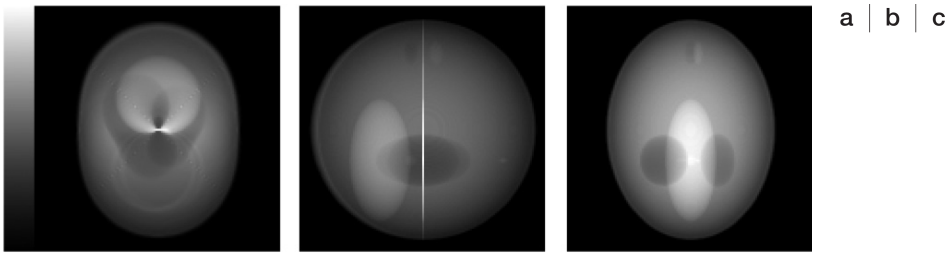


図 15. 数値ファントムの 3 次元ラドン空間
(a) 座標 (64, 64, 80) を通る xy 断面（横断面）
(b) 座標 (64, 64, 80) を通る yz 断面（矢状面）
(c) 座標 (64, 64, 80) を通る xz 断面（冠状面）

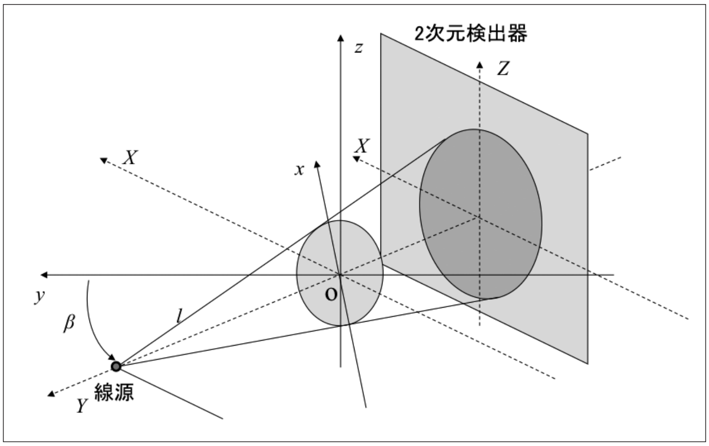


図 16. コーンビーム投影の幾何学的配置

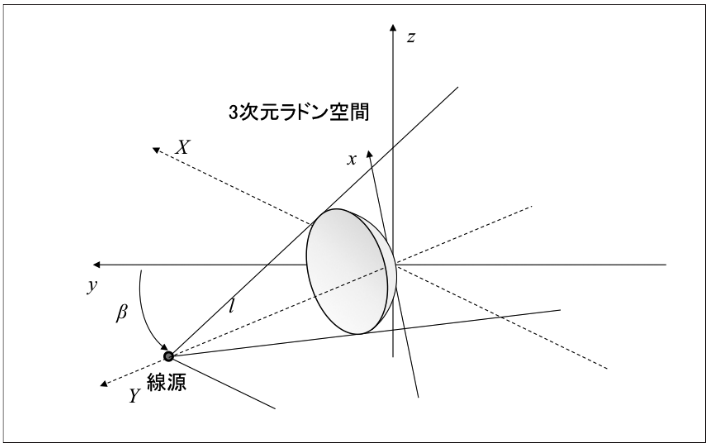


図 17. コーンビームの 1 つの投影と 3 次元ラドン空間

ビームにおけるラドン空間を**図15**に示す。このようにラドン空間ですべてのデータがそろっていれば完全な再構成が可能となる。

コーンビームとラドン空間について考える。コーンビームの投影データは、検出器が平面の場合、**図16**のようになり、数式で表すと

$$g(X,Z,\beta)=\int_l f(x,y,z)\,dl \tag{3}$$

となる。ここで $f(x,y,z)$ は対象の3次元の被写体を表す関数で、$g(X,Z,\beta)$ はその線積分である投影データを表す。積分経路 l は線源から対応する1つの検出器までの直線を表す。コーンビームで撮られた1つの2次元の投影は、ラドン空間では**図17**に示すようなお椀型になる。$z=0$ での xy 平面と、$y=0$ での xz 平面のラドン空間で1つの投影がどのように取得されるかを**図18**に示す。3次元のお椀型のデータは、それぞれの平面で線源を中心とし、原点を通る円の円周の一部となる。

このコーンビームの投影を360度回転した場合、ラドン空間がどのようになるか考える。**図19(a)**に示すように、xy 平面ではファンビームと同様に円周の一部が原点を中心に1回転するので、2次元ラドン空間のすべてのデータが取得できる。一方、**図19(b)**に示すように、xz 平面では、z 軸に沿って原点から離れるにしたがってデータが取れない領域が広

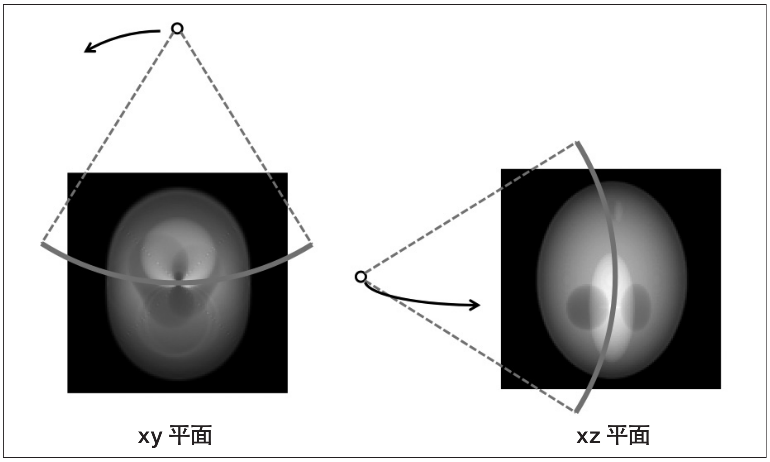


図18. コーンビームの1つの投影から得られるラドン空間のデータ位置

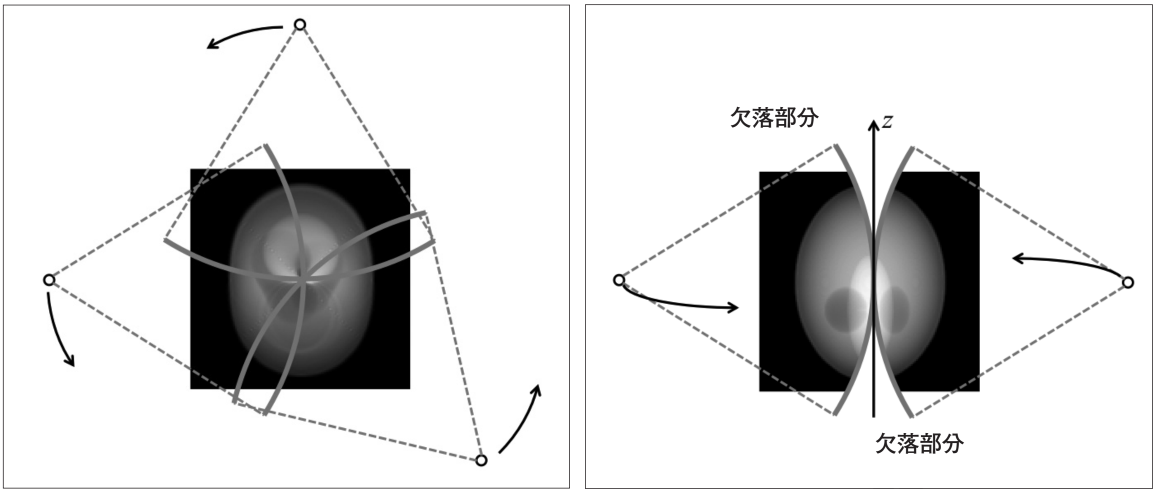


図19. コーンビームの投影を360度取得した場合のラドン空間
(a)xy 平面 (z = 0)：すべてのデータが取得できる　(b)xz 平面 (y = 0)：z 方向に中心から離れると欠落部分が生じる
a | b

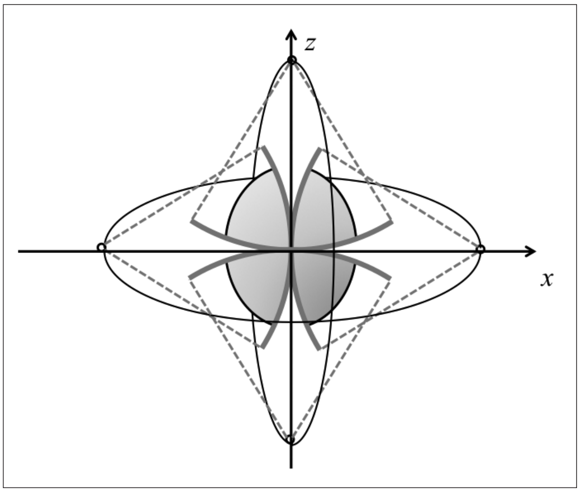


図 20. コーンビームで完全にデータを取得するための方法
回転方向を変えて 2 回データを取ることで欠落部分をなくすことができる

がってくる。よって原点を通る中心スライスでは正確に再構成できるが、原点から離れたスライスではデータの欠落が大きくなるので、正確な再構成はできなくなる。

では、正確な 3 次元の再構成を行うにはどのような条件が必要になるのであろうか。正確な再構成をするためには、3 次元再構成を行う領域のラドン空間のデータがすべて取得されなければならないので、コーンビームにおいては、z 軸に沿ったデータの欠落を無くす必要がある。単純に考えると**図 20** に示すようにz 軸以外の x 軸か y 軸に沿って回転したデータを追加取得すれば対象となる 3 次元ラドン空間のデータがすべて集まることになる。2 つ

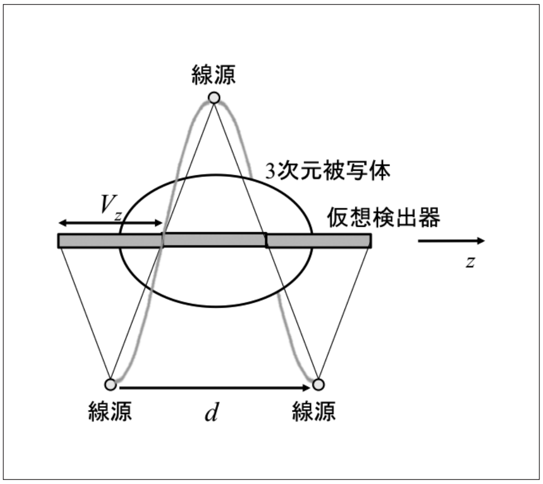


図 21. ヘリカルコーンビームの回転周期の距離 d と仮想検出器の幅 V_z との関係（$d = 2V_z$ の場合）

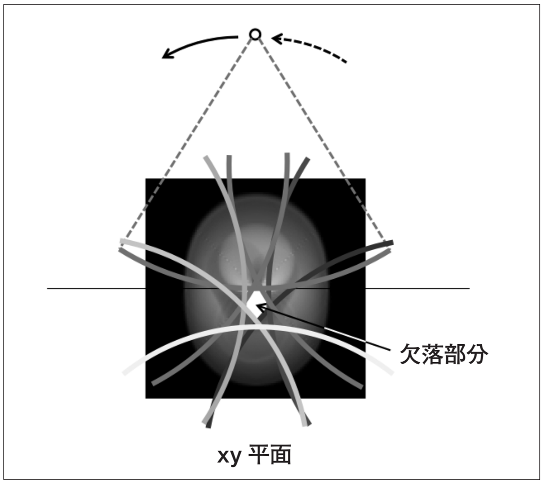


図 22. ヘリカルコーンビームのラドン空間（図 21 の条件）

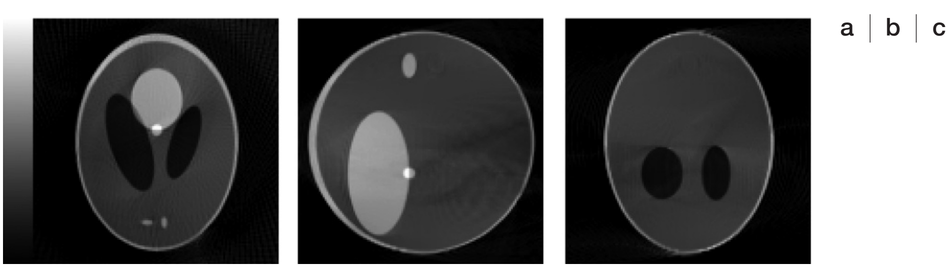


図 23. ヘリカルコーンビームの再構成画像（図 21 の条件）
(a) 座標（64, 64, 80）を通る xy 断面（横断面）
(b) 座標（64, 64, 80）を通る yz 断面（矢状面）
(c) 座標（64, 64, 80）を通る xz 断面（冠状面）

の回転軸の角度は直角である必要は無く、1回転目で欠落しているラドン空間をもう一つの回転が補填できるような角度であればよい。

次に、コーンビームを使ったヘリカルスキャンについて3次元のラドン空間を考える。ヘリカルスキャンではコーンビームが回転しながら回転軸方向にずれていくので、xy平面を調べればデータの取れない領域が明らかになる。**図21**に示すようなコーンビームが180度反対側に回転した段階で対象となる平面が検出器からはみ出る場合は、データの取れない領域がxy平面のラドン空間で**図22**のようになる。欠落部分は、中心から少しずれたところに存在し、スライスが変わるごとにその方向が変わっていく。3次元で考えると、欠落部位がz軸に巻き付いた形になる。この条件で再構成を行った結果を**図23**に示す。ラドン空間で投影の欠落が見られるので、再構成画像には値の歪みが生じる。**図24**に示すようなコーンビームが180度反対側に回転した段階で対象となる平面が検出器の半分だけ残っている場合は、データの取れない領域がxy平面のラドン空間で**図25**のようになる。欠落部分は見られるが、小さくなっている。この条件で再構成を行なった結果を**図26**に示す。ラドン空間の欠落が減少しているので、再構成画像の歪みも軽減されている。このようにコーンビーム再構成では、回転に対して軸方向に移動する量を減らすことで欠落部分を小さくしていくことができる。

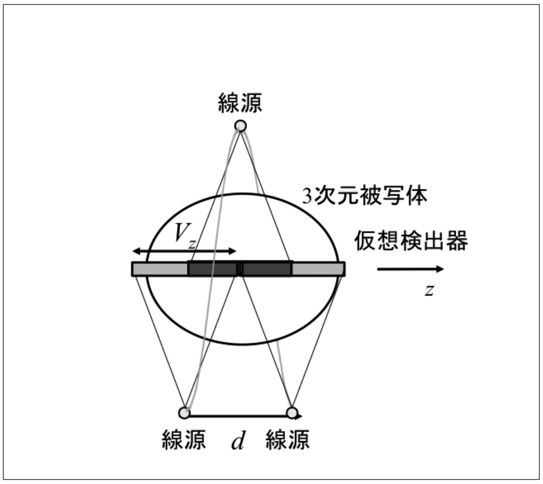


図24．ヘリカルコーンビームの回転周期の距離dと仮想検出器の幅V_zとの関係（d = V_zの場合）

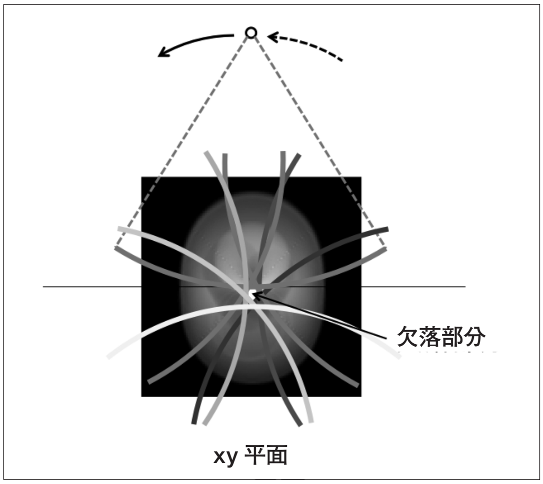


図25．ヘリカルコーンビームのラドン空間（図24の条件）

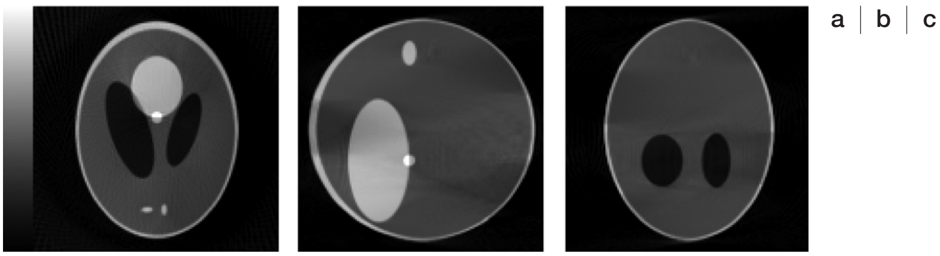


図26．ヘリカルコーンビームの再構成画像（図24の条件）
（a）座標（64, 64, 80）を通るxy断面（横断面）
（b）座標（64, 64, 80）を通るyz断面（矢状面）
（c）座標（64, 64, 80）を通るxz断面（冠状面）

また、**図27**に示すように二重らせん状に180度反対側の対向データも取得すると、ラドン空間での欠落がなくなる。この条件で再構成を行った結果を**図28**に示す。前の2つの再構成画像に比べ画質が良くなっている。

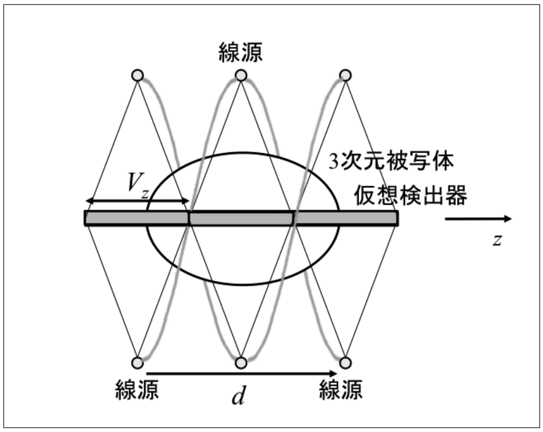


図27.　ヘリカルコーンビームの回転周期の距離dと仮想検出器の幅V_zが$d = 2V_z$の条件で対向位置のデータも取得される場合

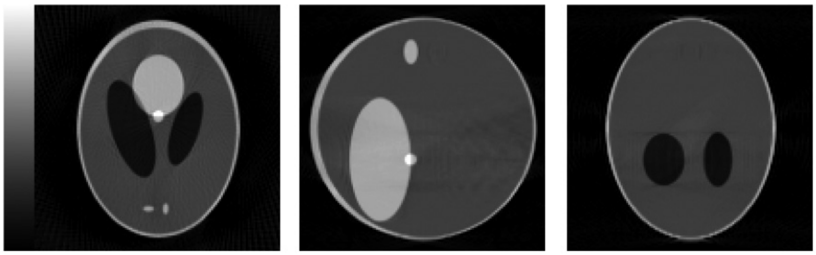


図28.　ヘリカルコーンビームの再構成画像（図27の条件）
（a）座標（64, 64, 80）を通るxy断面（横断面）
（b）座標（64, 64, 80）を通るyz断面（矢状面）
（c）座標（64, 64, 80）を通るxz断面（冠状面）