



## 断層映像法の基礎 第40回

## ML-EM 法と Maximum a Posterior-EM (Map-EM) 法

篠原 広行<sup>1)</sup>、小島 慎也<sup>2)</sup>、中世古 和真<sup>3)</sup>、橘 篤志<sup>4)</sup>、橋本 雄幸<sup>5)</sup><sup>1)</sup> 首都大学東京<sup>2)</sup> 東京女子医科大学東医療センター 放射線部<sup>3)</sup> つくば国際大学保健医療学部 診療放射線学科<sup>4)</sup> 東京慈恵会医科大学附属病院 放射線部<sup>5)</sup> 横浜創英大学 こども教育学部

## はじめに

逐次近似画像再構成法の開発経緯を辿ると、代数的方法、最小二乗法、統計的方法に大別される。代数的方法ははじめに開発された手法であるが、圧縮センシング画像再構成の登場によって再び注目されている。第39回では最小二乗法を逐次近似によって解くための勾配法について解説した。本稿では、勾配法の計算過程と再構成画像を示す。次に最尤推定-期待値最大化 (ML-EM) 法について図を用いて解説し、ML-EM 法に制約条件を付けた Maximum a Posterior-EM (Map-EM) 法について述べる。ここで制約条件とは、画像と投影データの整合性を評価する項 (主に画像の分解能に関する) の他に、画像の事前情報 (例えば、画像は負の値を持たない、有効視野内に限定される、近傍画素間で大きく値が変化しない、領域内では滑らかななど) を画像再構成の評価式に加える条件である。画像は近傍画素間で大きく値が変化しない、領域内では滑らかななど制約条件を付けることで、分解能と雑音のバランスをとった画像再構成が行われる。画像と投影データの整合性のみすなわち分解能に着目しただけの ML-EM (OS-EM) 法は、投影データが雑音を含む場合にはそれに一致するように画像を再構成するため、雑音の影響を強く受ける。その結果、収束せず反復の途中で発散してしまうことがある。一方、Map-EM 法は雑音を含む投影データにも頑健であることが知られている。第39回で紹介した

Total variation ノルム (TV ノルム) は画像の分散を小さくする制約条件であるが、本稿では、Map-EM 法の1つとしてメディアンフィルタを ML-EM 法に組み込んだ median root prior-EM (MRP-EM) 法を紹介する。

1. 最小二乗法の逐次近似計算
2. 最尤推定-期待値最大化 (ML-EM) 法
3. 完全データの条件付き期待値
4. メディアンフィルタ
5. メディアンフィルタを用いた MAP-EM 法 (MRP-EM 法)

## 1. 最小二乗法の逐次近似計算

原画像  $\mathbf{f}$  を正方形画像とし1辺の画素数を  $N$ 、総画素数を  $J (=N \times N)$ 、投影角度数  $M$ 、角度あたりの投影数  $N$ 、総投影数を  $I (=M \times N)$ 、係数行列を  $C (=J \times I)$ 、投影を  $\mathbf{p}$  とするときこれらの関係は以下で表される。

$$C\mathbf{f} = \mathbf{p} \quad (1)$$

$C$  は行列、 $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{p}$  は列 (縦) ベクトルである。画像と投影データの整合性を評価する関数  $Q$  を  $L_2$  ノルム

にとると、 $Q$  は次式で表される。

$$Q = \|Cf - p\|_2^2 \quad (2)$$

(2) 式の勾配は

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial f} = C^T(Cf - p) \quad (3)$$

評価関数の最大化ではなく最小化が目的なので (3) 式の勾配の逆方向に (誤差が減る方向に) 解を探索していく。そこで

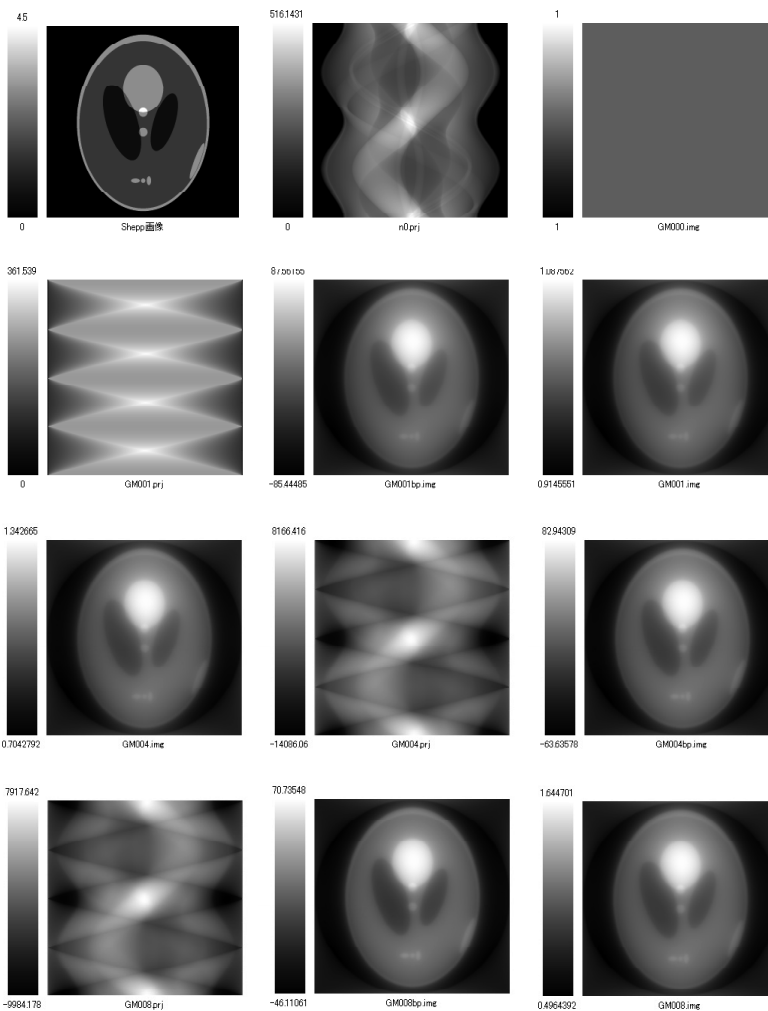
$$g = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial f} = C^T(Cf - p) \quad (4)$$

と置くと  $g$  は誤差の勾配ベクトルを表し反復計算は

次式で表される。

$$f^{k+1} = f^k - a_k \nabla Q \quad (5)$$

ここで  $f^k$  は反復式における更新前の画像、 $f^{k+1}$  は更新後の画像、 $a_k$  は加速係数と呼ばれる反復計算の収束を速めるための係数で、この係数の違いによって最急降下法や共役勾配法など一般に勾配法と呼ばれる最適化法がある。図1に勾配法の計算過程を示す。図2は勾配法、最急降下法、共役勾配法の再構成画像をそれぞれ反復回数32と50について示す。同じ反復回数で比較すると勾配法、最急降下法、共役勾配法の再構成画像には分解能の違いが現れており収束速度の違いがわかる。



|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |
| j | k | l |

図1. 勾配法の計算過程

- (a) 原画像:  $f$
  - (b) 投影データ:  $p$
  - (c) 初期画像 (256 × 256 画素の値をすべて1とした場合):  $f^0$
  - (d) 初期画像の順投影:  $Cf^0$
  - (e) 投影データと初期画像の順投影との差の逆投影:  $C^T(p - Cf^0)$
  - (f) 反復1回の再構成画像:  $f^1 + \alpha C^T(p - Cf^0)$
  - (g) 反復4回の再構成画像:  $f^4$
  - (h) 反復4回の再構成画像の順投影:  $Cf^4$
  - (i) 投影データと反復4回の再構成画像の順投影との差の逆投影:  $C^T(p - Cf^4)$
  - (j) 反復7回の再構成画像の順投影:  $Cf^7$
  - (k) 投影データと反復7回の再構成画像の順投影との差の逆投影:  $C^T(p - Cf^7)$
  - (l) 反復8回の再構成画像:  $f^8$
- (5) 式の  $\alpha_k = 0.01$  としている。各画像の上付き数字は (5) 式の反復回数を示す。

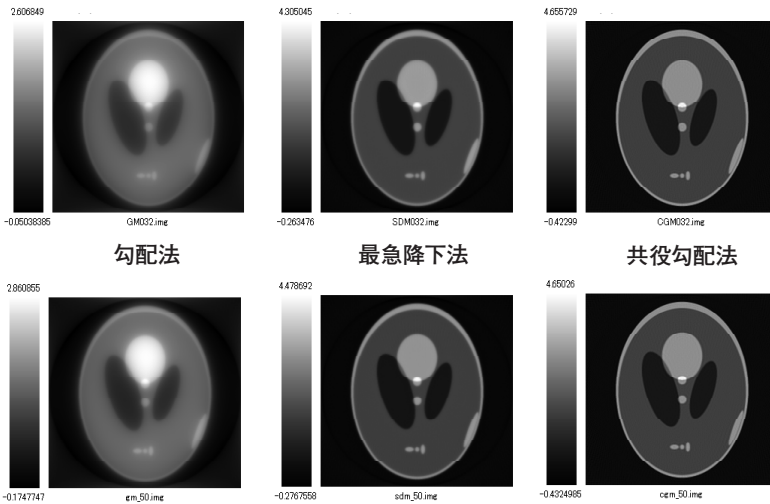


図2. 勾配法、最急降下法、共役勾配法の再構成画像  
上：反復32回、下：反復50回。  
同じ反復回数で比較すると画像の分解能の違いが顕著であり、共役勾配法の収束が速いことがわかる。

## 2. 最尤推定一期待値最大化 (ML-EM) 法

EM アルゴリズムはあるデータが欠けているとき (EM アルゴリズムではこのようなデータを不完全データという)、その欠けたデータを観測できれば未知パラメータの推定が極めて簡単に行えることを利用して観測データが得られる確率 (尤度関数) を最大にするための方法である。ここで、データが欠けているとは光子数の観測が誤っているということではなく、単光子放射型 CT (SPECT) を想定した図3のように各画素から発生した光子を個別に数える代わりに、それらの総和として観測することを意味する。SPECT では画素  $j$  から検出器  $i$  に入射する光子を直接検出することはできないので、これを観測されないデータ  $x_{ij}$  とする。添字の  $i$  は光子が入射する検出器を、 $j$  はその光子を発生する画素の番号を表す。1 番目の画素から検出器  $i$  に入射する光子数を  $x_{i1}$  を  $x_{i1}=0$  のように表す (楕円の外には線源がないとし、その位置にある画素の光子数は0としている)。2 番目の画素から検出器  $i$  に入射する光子数  $x_{i2}$  は1なので  $x_{i2}=1$  と書き、この光子を  $x_{i2}$  の横に1つの○で示す。5 番目の画素から検出器  $i$  に入射する光子数  $x_{i5}$  は2なので  $x_{i5}=2$  と書き、この光子を  $x_{i5}$  の横にとくに2個の●で示している。○と●は光子のエネルギーが異なるという意味ではなく、単に他の画素から発生する光子と5 番目

の画素から発生する光子を区別するのに用いている。検出器  $i$  の縦の矩形は収集される投影  $y_i$  を表し、その中には合計8個の光子がある。実際にわれわれが観測できるデータは  $y_i$  であり、8個の光子のうちの2個は画素5からのものであるが、それらは他の7つの画素からの光子と区別できない。 $y_i$  は検出器  $i$  に垂直な直線上にある画素 (この場合は8個の画素) それぞれから発生し、検出器  $i$  に入射した光子数  $x_{ij}$  の総和になる。

$$y_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} + x_{i6} + x_{i7} + x_{i8} \quad (6)$$

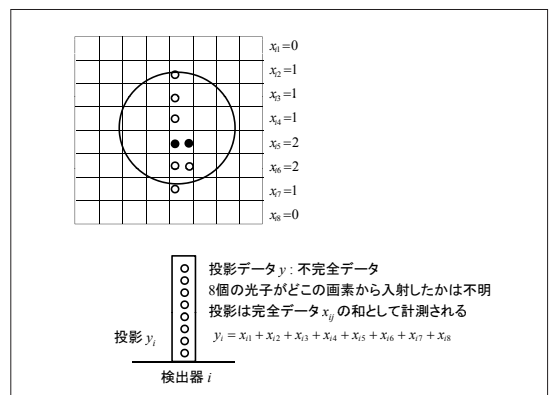


図3. SPECT の投影データと完全データ

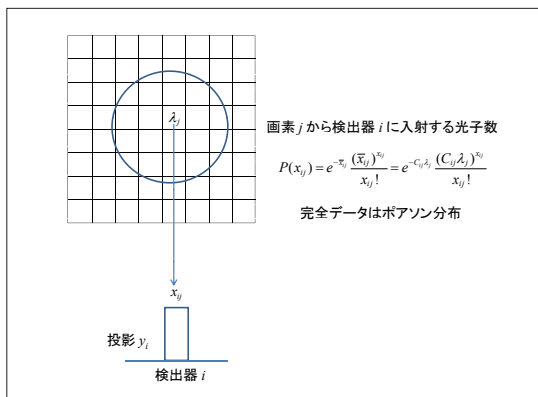


図 4. 完全データとして考える画素 j から検出器 i に入射する光子数

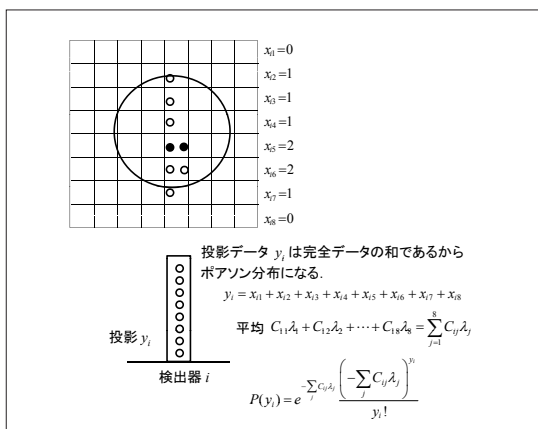


図 5. ポアソン分布に従う SPECT の投影データ

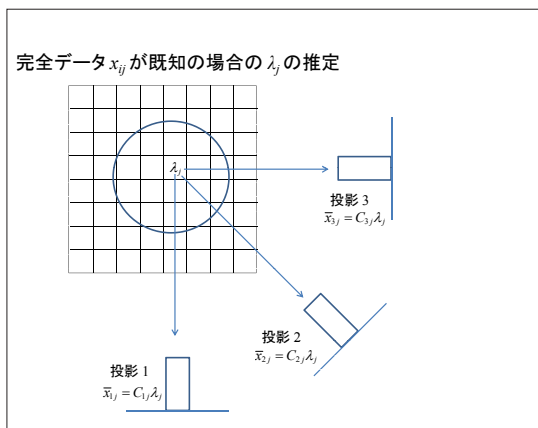


図 6. 完全データ  $x_{ij}$  による  $\lambda_j$  の推定

このような場合に  $x$  を完全データ、 $x$  の和によって表される  $y$  を不完全データという。  $x_{ij}$  がわかれば  $y_i$  が求められるので  $x_{ij}$  の集合  $\{x_{ij}\}$  を完全データ、  $y_i$  の集合は不完全データである。画素 j から検出器 i に入射する光子数  $x_{ij}$  の平均を次式

$$\bar{x}_{ij} = C_{ij} \lambda_j \tag{7}$$

で表すと  $x_{ij}$  は平均が  $C_{ij} \lambda_j$  のポアソン分布をする (図 4)。

$$P(x_{ij}) = e^{-\bar{x}_{ij}} \frac{(\bar{x}_{ij})^{x_{ij}}}{x_{ij}!} = e^{-C_{ij} \lambda_j} \frac{(C_{ij} \lambda_j)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \tag{8}$$

投影データはポアソン分布に従う  $x_{ij}$  の和で表されるので  $y_i$  も  $x_{ij}$  の平均

$$C_{i1} \lambda_1 + C_{i2} \lambda_2 + \dots + C_{i8} \lambda_8 = \sum_{j=1}^8 C_{ij} \lambda_j \tag{9}$$

を期待値とするポアソン分布に従う (図 5)。

$$P(y_i) = e^{-\sum_j C_{ij} \lambda_j} \frac{\left( \sum_j C_{ij} \lambda_j \right)^{y_i}}{y_i!} \tag{10}$$

SPECT の投影データが互いに独立であるという性質によって、角度方向について全投影データの尤度はそれぞれの投影データの尤度の積になる。この独立性とポアソン分布の性質から統計的画像再構成の ML-EM 法が定式化される。

### 完全データ $x$ による $\lambda$ の推定

図 6 において画素 j から発生し検出器 1 で観測した光子数を  $x_{1j}$ 、検出器 2 で検出した光子数を  $x_{2j}$ 、 $\dots$ 、検出器 n で検出した光子数を  $x_{nj}$  とし、それぞれの平均を  $\bar{x}_{1j}$ 、 $\bar{x}_{2j}$ 、 $\bar{x}_{3j}$ 、 $\dots$ 、 $\bar{x}_{nj}$  とすれば

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1j} &= C_{1j} \lambda_j \\ \bar{x}_{2j} &= C_{2j} \lambda_j \\ \bar{x}_{3j} &= C_{3j} \lambda_j \\ &\vdots \\ \bar{x}_{nj} &= C_{nj} \lambda_j \end{aligned} \tag{11}$$

これから  $\lambda_j$  は次式で与えられる。

$$\lambda_j = \frac{\bar{x}_{1j} + \bar{x}_{2j} + \bar{x}_{3j} + \dots + \bar{x}_{nj}}{C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} + \dots + C_{nj}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^n C_{ij}} \quad (12)$$

上式の平均  $\bar{x}_{ij}$  の代わりに仮想的な観測量として導入した完全データ  $x_{ij}$  を用いた

$$\hat{\lambda}_j = \frac{x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \dots + x_{nj}}{C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} + \dots + C_{nj}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{\sum_{i=1}^n C_{ij}} \quad (13)$$

が  $\lambda_j$  の最尤推定になる。

### 3. 完全データの条件付き期待値

完全データ  $x_{ij}$  がわかれば  $j$  番目の画素の値 (光子数) を求めることができる。一方、 $x_{ij}$  は実際には観測されないため投影データ  $y_i$  から推定する必要がある。このような場合の方法として  $y_i$  が得られているという条件のもとで、ある  $x_{ij}$  が生じる確率を最大にする推定 (事後確率推定：MAP 推定) が存在する。これによれば、 $x_{ij}$  の MAP 推定量は次式で与えられる。

$$\hat{x}_{ij} = \frac{y_i C_{ij} \lambda_j}{\sum_{m=1} C_{im} \lambda_m} \quad (14)$$

(14) 式の分母は図7のように検出器  $i$  に垂直な直線上にあるすべての画素から入射する光子の総数を、分子の  $C_{ij} \lambda_j$  は画素  $j$  から検出器  $i$  に入射する光子数である。両者の比は画素  $j$  から検出器に入射する光子の割合 (確率に比例) になる。これを投影データ  $y_i$  に掛ければ画素  $j$  から検出器  $i$  に入射する光子数の推定値  $\hat{x}_{ij}$  となる。図7では検出器  $i$  の投影データを  $y_i$  とし、これに垂直な直線上に8個の画素があるとしている。各画素、例えば、4番目の画素から発生する光子数  $x_{i4}$  は観測できないので、 $y_i$  を通して  $x_{i4}$  を推定するように考えたのが (14) 式である。1番目の画素の光子数を  $\lambda_1$ 、この画素の光子数が検出器  $i$  に入射する確率を  $C_{i1}$ 、その光子数を  $x_{i1}$  とすれば  $x_{i1}$  は平均が  $C_{i1} \lambda_1$  のポアソン分布に従う。同様に2番目の画素の光子数を  $\lambda_2$ 、この画素の光子数が検出器  $i$  に入射する確率を  $C_{i2}$ 、その光子数を  $x_{i2}$  とすれば  $x_{i2}$  は平均が  $C_{i2} \lambda_2$  のポアソン分布に

従う。他の画素についても同様である。すると完全データの和で表される投影データもポアソン分布に従うので、 $x_{i4}$  の条件付き期待値は次式で表される。

$$\hat{x}_{i4} = \frac{y_i C_{i4} \lambda_4}{C_{i1} \lambda_1 + C_{i2} \lambda_2 + C_{i3} \lambda_3 + \dots + C_{i8} \lambda_8} \quad (15)$$

しかし、(15) 式を計算するためには  $\lambda_j$  が既知でなければならない。(15) 式の  $\lambda_j$  は未知パラメータであるためこれを  $k$  回目の反復計算の推定値  $\hat{\lambda}_j^k$  とし  $\hat{x}_{ij}$  を次式に代える。

$$\hat{x}_{ij} = \frac{y_i C_{ij} \hat{\lambda}_j^k}{\sum_{m=1} C_{im} \hat{\lambda}_m^k} \quad (16)$$

次に (13) 式の  $\lambda_j$  を  $k+1$  回目の反復計算の推定値  $\hat{\lambda}_j^{k+1}$  として、(16) 式を (13) 式に代入すると ML-EM 法は以下のように表される。

$$\hat{\lambda}_j^{k+1} = \frac{1}{\sum_{i=1} C_{ij}} \sum_{i=1} \frac{y_i C_{ij} \hat{\lambda}_j^k}{\sum_{m=1} C_{im} \hat{\lambda}_m^k} \quad (17)$$

以下では簡便のため

$$\hat{\lambda}_j^k = \lambda_j^k, \quad \lambda_j^{k+1} = \lambda_j^{k+1} \quad (18)$$

のように表すと ML-EM 法は次式となる。

$$\lambda_j^{k+1} = \frac{\lambda_j^k}{\sum_{i=1} C_{ij}} \sum_{i=1} \frac{y_i C_{ij}}{\sum_{m=1} C_{im} \lambda_m^k} \quad (19)$$

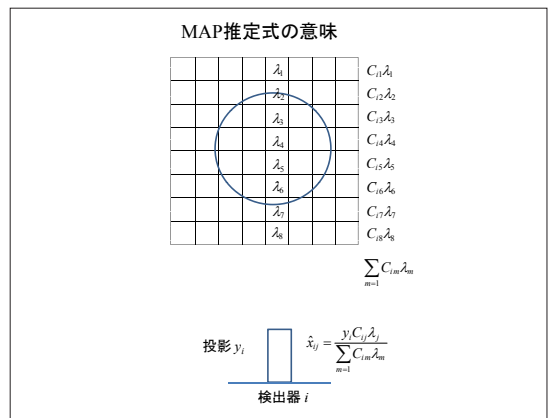


図7. 事後確率推定 (MAP 推定) による完全データの推定

ポアソン分布の性質と条件付き期待値

確率変数  $Z_1, Z_2$  がそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  のポアソン分布に従うとする。 $Z_1, Z_2$  が互いに独立のとき、期待値について次式が成り立つ。

$$E(Z_1 | Z_1 + Z_2) = \frac{(Z_1 + Z_2)\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

ポアソン分布に従う完全データ  $x_{ij}$  の和  $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}$  において  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  の平均はそれぞれ  $C_{i1}\lambda_1, C_{i2}\lambda_2, \dots, C_{in}\lambda_n$  であるから、画素  $j$  から検出器  $i$  に入射する光子数  $x_{ij}$  の期待値は

$$E(x_{ij} | x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) = \frac{(x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in})C_{ij}\lambda_j}{C_{i1}\lambda_1 + C_{i2}\lambda_2 + \dots + C_{in}\lambda_n}$$

図8. ML-EM 式の導出に使われるポアソン分布の性質

条件付き期待値

投影データ  $y_i$  と現在の推定値  $\lambda^k$  が与えられたもとの  $x_{ij}$  の条件付き期待値

$$E(x_{ij} | x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) = \frac{(x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in})C_{ij}\lambda_j}{C_{i1}\lambda_1 + C_{i2}\lambda_2 + \dots + C_{in}\lambda_n}$$

において  $y_i$  は  $x_{ij}$  を用いて

$$y_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}$$

と表せるから

$$E(x_{ij} | y_i, \lambda^k) = \frac{y_i C_{ij} \lambda_j}{C_{i1} \lambda_1 + C_{i2} \lambda_2 + \dots + C_{in} \lambda_n} = \frac{y_i C_{ij} \lambda_j}{\sum_{m=1}^n C_{im} \lambda_m}$$

図9. ML-EM 式に現れる完全データの条件付き期待値

ML-EM 式の成り立ち

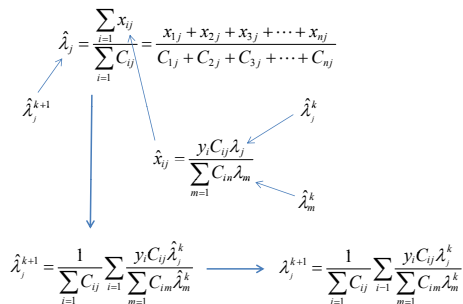


図10. 完全データの考えから導かれる ML-EM 式の成り立ち

(19) 式の分子は画素  $j$  から発生し検出器  $i$  に入射する光子数を検出器の数  $n$  について加えた総数である。この推定量を期待値  $\sum_{i=1}^n C_{ij} \lambda_j$  に等しく置き、 $\lambda_j$  について解いた解を更新値  $\lambda_j^{k+1}$  と置いたものが (19) 式である。図8のポアソン分布の性質と条件付き期待値、図9の条件付き期待値は、図10の ML-EM 式の成り立ちを理解する上で重要である。

4. メディアンフィルタ

本節では非線形フィルタのメディアンフィルタを線形フィルタと対比して述べる。 $f(x,y)$  を入力画像、 $g(x,y)$  を出力画像、 $\phi$  をあるフィルタ処理に関する演算子とする。 $\phi$  が次の性質を持つとき  $\phi$  は線形フィルタであるという。

$$\phi \{ a f_1(x,y) + b f_2(x,y) \} = a \phi \{ f_1(x,y) \} + b \phi \{ f_2(x,y) \} \tag{20}$$

ここで、 $a, b$  は定数である。(20) 式は入力の線形和(個々の入力を定数倍し加算すること)に対する出力は個々の入力に対する出力の線形和に等しいことを示している。表1は重みが1の3×3マトリクスの移動平均フィルタを示す(1/9を掛ける必要があるが重み係数では9を省略し計算時に9で割っている)。演算子  $\phi$  が移動平均フィルタのとき、フィルタ処理は注目画素の値と周囲8画素の値の総和を計算し、その平均値で注目画素の値を置きかえる作用をする。例えば、表2  $f_1(x,y)$  の中心画素(2行2列)に作用させると、

$$\frac{1 \times 12 + 1 \times 16 + 1 \times 47 + \dots + 1 \times 46 + 1 \times 6}{9}$$

表1. 重み1の3×3移動平均フィルタ

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

表2.  $f_1(x,y)$

|    |    |    |
|----|----|----|
| 12 | 16 | 47 |
| 41 | 17 | 29 |
| 8  | 46 | 6  |

移動平均フィルタを表 2  $f_1(x,y)$  および表 3  $f_2(x,y)$  の注目画素(2行2列)に作用させ、 $a=b=1$ として(20)式が成立することを確認する。

$a=b=1$ としたとき  $f_1(x,y) + f_2(x,y)$  は表 4 のようになる。

(20) 式の左辺は

$$\frac{1}{9} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 \{f_1(x,y) + f_2(x,y)\} = 40.11$$

(20) 式の右辺は

$$\frac{1}{9} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 f_1(x,y) = 24.67$$

$$\frac{1}{9} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 f_2(x,y) = 15.44$$

であるから (20) 式が成立する。

演算子  $\phi$  がメディアンフィルタのとき、フィルタ処理は画素の値を順に並べたときの中央値で注目画素の値を置きかえる作用をする。このフィルタを表 2  $f_1(x,y)$  および表 3  $f_2(x,y)$  の中心画素(2行2列)に作用させ、(20)式が成立しないことすなわちメディアンフィルタは非線型フィルタであることを確認する。 $f_1(x,y)$  の値を小さい順に並べると

{6 8 12 16 17 29 41 46 47}

中央値は 17、 $f_2(x,y)$  の値を小さい順に並べると

{0 1 5 8 20 23 25 28 29}

中央値は 20、 $f_1(x,y) + f_2(x,y)$  の値を小さい順に並べると

{16 22 34 37 39 42 46 58 67}

中央値は 39 となり、メディアンフィルタでは (19) 式の線形性が成立しないことがわかる。

## 5. メディアンフィルタを用いた MAP-EM 法

移動平均フィルタあるいは注目画素の重みを大きくした加重平均フィルタ表 5 は雑音を抑制する(平滑化)のに有効であるが、同時に画像の分解能を低下させる。平滑化の際のぼけを極力減らす方法として前節で述べたメディアンフィルタがある。メディアンフィルタを用いた場合の MAP-EM 法を median root prior (MRP) -EM 法といい、次式で表される。

$$\lambda_j^{k+1} = \frac{\lambda_j^k}{\sum_i C_{ij} + \beta \frac{\lambda_j^k - M_j}{M_j}} \sum_i \frac{y_i C_{ij}}{\sum_{m \in I_i} C_{im} \lambda_m^k} \quad (21)$$

$M_j$  は注目画素とその周囲の画素から求められた中央値を示す。はじめに、雑音を含まない投影データを(21)式で画像再構成しメディアンフィルタの働きについて調べてみよう。図 11 は Shepp-Logan ファントムで単純な楕円(円)の集まりからなっている。図 11 (a) は角度投影数を 180 度について 256、1 方

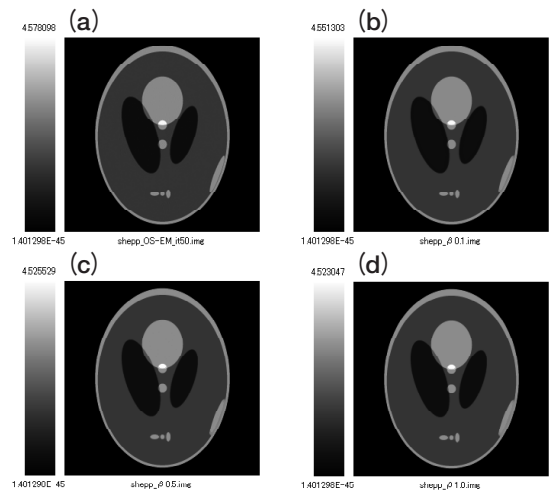


図 11. Shepp-Logan ファントムの MRP-EM 法による再構成画像(雑音を含まない場合)

(a) 反復 50 回の OS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta=0.1$ )、  
(c) MRP-EM ( $\beta=0.5$ )、(d) MRP-EM ( $\beta=1.0$ )、  
MRP-EM の反復は OS-EM と同じく 50 回。

表 3.  $f_2(x,y)$

|    |    |    |
|----|----|----|
| 25 | 23 | 20 |
| 1  | 5  | 29 |
| 8  | 0  | 28 |

表 4.  $f_1(x,y) + f_2(x,y)$

|    |    |    |
|----|----|----|
| 37 | 39 | 67 |
| 42 | 22 | 58 |
| 16 | 46 | 34 |

表 5. 加重平均フィルタ

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 1 |

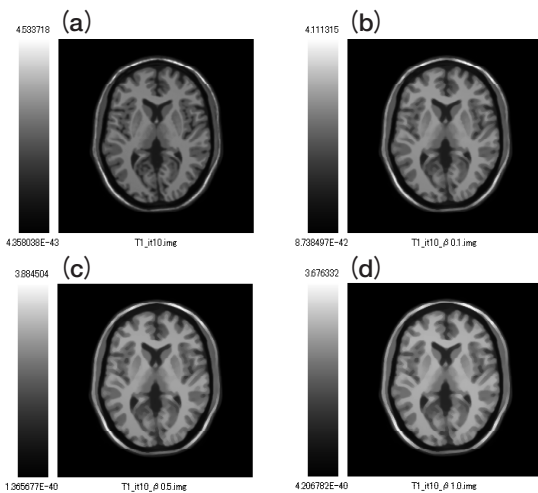


図 12. T1 強調画像の MRP-EM 法による再構成画像 (雑音を含まない場合)

(a) 反復 50 回の OS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta=0.1$ )、  
(c) MRP-EM ( $\beta=0.5$ )、(d) MRP-EM ( $\beta=1.0$ )、  
MRP-EM の反復は OS-EM と同じく 50 回。

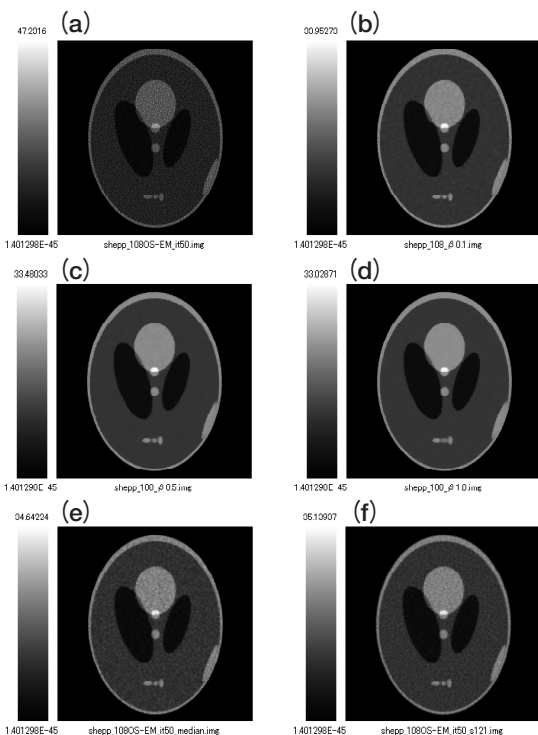


図 13. Shepp-Logan ファントムの MRP-EM 法による再構成画像 (雑音を含む場合)

(a) 反復 50 回の OS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta=0.1$ )、  
(c) MRP-EM ( $\beta=0.5$ )、(d) MRP-EM ( $\beta=1.0$ )、  
画像再構成後にメディアンフィルタ処理 (e)、  
加重平均フィルタ処理 (f)。MRP-EM の反復は OS-EM と同じく 50 回、投影データの総和を  $1 \times 10^8$  としている。

向の投影数を 256 としサブセット 16 の OS-EM 法(19式)で 50 回の反復による再構成画像を示す。原画像の Shepp-Logan ファントムの最大値は 4.5、最小値は 0 であり、再構成画像 (a) の最大値は 4.578 である。(b) は画像再構成条件を同じにし (21) 式で  $\beta=0.1$  とした場合、最大値は 4.551 である。以下、(c)  $\beta=0.5$  のときの最大値は 4.526、(d)  $\beta=1.0$  のときの最大値は 4.523 と  $\beta$  を変えても最大値の変化は僅かである。そして、画像の分解能に関する視覚的な印象にも大きな変化はない。

図 12 (a) は 10 回の反復による MRI の T1 強調画像を示し最大値は 4.534 である。原画像は Shepp-Logan ファントムに合わせ最大値を 4.5、最小値を 0 にしている。以下、(b)  $\beta=0.1$  のとき 4.111、(c)  $\beta=0.5$  のとき 3.885、(d)  $\beta=1.0$  のとき 3.676 と最大値は  $\beta$  の増加とともに、Shepp-Logan ファントムに比べ大きく減少している。2 つのファントムの違いは、Shepp-Logan ファントムは構造が単純でかつ強度が一定の広い領域が多くあること、T1 強調画像は白質、灰白質、脳脊髄液など強度が一定の広い領域はあるものの構造が複雑なことである。(21) 式でメディアンフィルタの比重  $\beta$  を大きくしても Shepp-Logan ファントムの分解能に及ぼす影響は小さいが、T1 強調画像では次第に組織間のコントラストが低下し平坦な構造になっていく。メディアンフィルタは前節で確認したように、注目画素を周囲の画素の中央値で置き換える作用をするので構造が複雑な領域も次第に平坦になる。これらメディアンフィルタの特徴を踏まえ、次に、雑音を含む投影データを (21) 式で再構成した画像を見てみよう。

図 13 は投影データの総計数値を  $10^8$  としてこの投影データにポアソン雑音を加え、反復回数 50 の OS-EM 法による再構成画像を示す。反復回数 50 では分解能は高くなる一方、雑音を含んだ投影データに画像が一致するように画像再構成されるため、再構成画像には雑音も顕著になる。(b) ~ (d) は MRP-EM 法による再構成画像を示し、(b)  $\beta=0.1$ 、(c)  $\beta=0.5$ 、(d)  $\beta=1.0$  である。画像の分解能は  $\beta=0.1$  の場合が最も高く、下方の 3 つの楕円が分離している。一方、大きな楕円内の均一性は悪い。 $\beta=0.5$  の場合は下方の 3 つの楕円の分離が (a) に比べ低下するものの、大きな楕円内の均一性は向上する。 $\beta=1.0$  の場合には、下方の 3 つの楕円が分離



しなくなるが大きな楕円内の均一性は良い。(e)はOS-EM法で画像再構成した後にメディアンフィルタ処理を行った場合、(f)は表5の加重平均フィルタ処理した場合を示す。雑音を含む投影データを再構成後にメディアンフィルタ処理や加重平均フィルタ処理しても、画像再構成の中で雑音を抑制するMRP-EM法による(c)や(d)のような画質が得られないことは明らかである。

図14は投影データの総計数値を $10^7$ としてそれにポアソン雑音を加え、反復回数50のOS-EM法による再構成画像を示す。雑音量は図13に比べ大きくなるが、 $\beta=1.0$ のMRP-EM法によって分解能は低下するものの画像全体に雑音が抑制されている。OS-EM法で画像再構成した後にメディアンフィルタ処理の(e)や加重平均フィルタ処理の(f)では雑音の抑制が不十分である。(g)はメディアンフィルタ処理を10回行った場合で、1回の場合の(e)に比べ雑音は抑制されるものの画像中にまだ模様が目立つようになる。(h)は加重平均フィルタ処理を10回行った場合で、1回の場合の(f)に比べ雑音の抑制は良好であるが過度な平滑化によって画像のぼけが目立つようになる。以上のように、投影データの総計数値が $10^7$ 程度あれば、構造が簡単なShepp-Loganファントムについて、MRP-EM法はOS-EM法に比べ良好な再構成画像を与えることがわかった。

Shepp-Loganファントムでの結果が解剖学的形状を有するT1強調画像についても成り立つか調べてみる。図15(a)は投影データの総計数値を $10^8$ としてそれにポアソン雑音を加え、反復回数10のOS-EM法による再構成画像を示す。50回としなかった理由は、反復回数18程度からOS-EM法は収束しないで発散するためである。一方、MRP-EM法は反復回数50でも発散せず収束するが、(a)のOS-EM法に合わせ反復回数10としている。 $\beta$ については少し細かく変化させており、(b) $\beta=0.005$ 、(c) $\beta=0.01$ 、(d) $\beta=0.05$ 、(e) $\beta=0.1$ 、(f) $\beta=0.5$ 、(g) $\beta=1.0$ はMRP-EM法による再構成画像である。(h)は再構成後にメディアンフィルタ処理した画像を示す。画像の分解能と雑音抑制の兼ね合いから、(d) $\beta=0.05$ 、(e) $\beta=0.1$ のMRP-EM法による再構成画像が良さそうであるが、これらは画像再構成後にメディアンフィルタ処理をした(g)の画像と大差がない印象を受ける。図16(a)は投影データの総

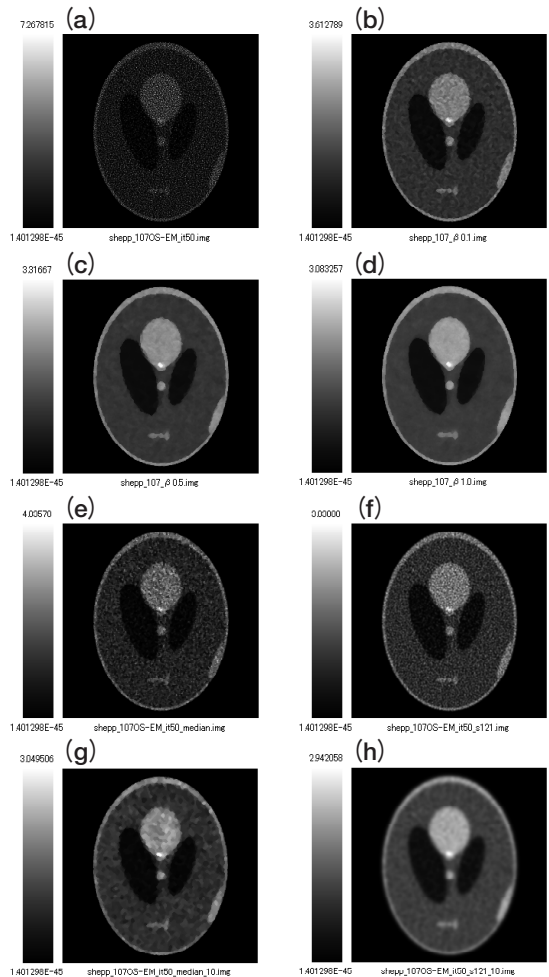


図14. Shepp-LoganファントムのMRP-EM法による再構成画像(雑音を含む場合)

- (a) 反復50回のOS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta=0.1$ )、
  - (c) MRP-EM ( $\beta=0.5$ )、(d) MRP-EM ( $\beta=1.0$ )、
  - (e) OS-EM再構成画像をメディアンフィルタ処理、
  - (f) OS-EM再構成画像を加重平均フィルタ処理、
  - (g) OS-EM再構成画像にメディアンフィルタ処理を10回行った画像、
  - (h) OS-EM再構成画像に加重平均フィルタ処理を10回行った画像、
- MRP-EMの反復はOS-EMと同じく50回、投影データの総和を $1 \times 10^7$ としている。

計数値を $10^7$ としてそれにポアソン雑音を加え、反復回数10のOS-EM法による再構成画像を示す。(b) $\beta=0.005$ 、(c) $\beta=0.01$ 、(d) $\beta=0.05$ 、(e) $\beta=0.1$ 、(f) $\beta=0.5$ 、(g) $\beta=1.0$ はMRP-EM法による再構成画像である。(h)は再構成後にメディアンフィルタ処

理した画像を示す。雑音レベルが大きくなると画像再構成の中にメディアンフィルタを組み入れたMRP-EM法とOS-EM法で画像再構成した後にメディアンフィルタ処理した画像との違いに区別がつかずMRP-EM法の有用性を確認することができない。

雑音抑制を目的としたMAP-EM法では、画像更新のたびに雑音抑制を行うことで反復による雑音の増加を防ぐことができ、ML-EM法(OS-EM法)の

ような雑音が顕著になる前に反復を中断しなければならない問題が解消される。寄与率を示すパラメータ $\beta$ を変えることで抑制の程度を変更することが可能である。原画像の構造が比較的簡単で雑音が多い投影データに対しては、MRP-EM法は有効であるが、頭部画像のように構造が複雑で雑音が多い投影データに対しては、MRP-EM法は必ずしも有効ではない結果となった。

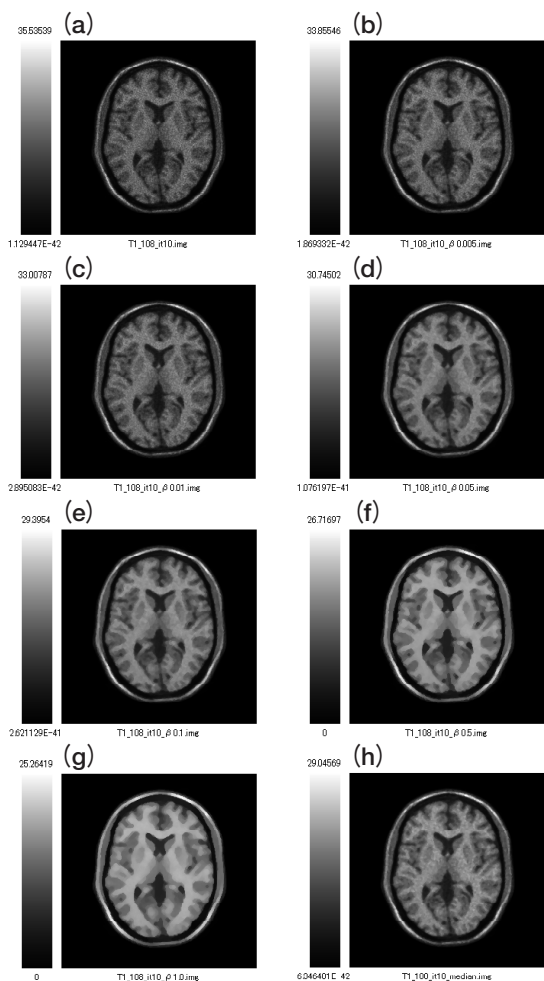


図 15. T1 強調画像の MRP-EM 法による再構成画像 (雑音を含む場合)

(a) 反復 10 回の OS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta = 0.005$ )、  
 (c) MRP-EM ( $\beta = 0.01$ )、(d) MRP-EM ( $\beta = 0.05$ )、  
 (e) MRP-EM ( $\beta = 0.1$ )、(f) MRP-EM ( $\beta = 0.5$ )、  
 (g) MRP-EM ( $\beta = 1.0$ )、  
 (h) OS-EM 再構成画像をメディアンフィルタ処理。  
 MRP-EM の反復は OS-EM と同じく 10 回、投影データの総和を  $1 \times 10^8$  としている。

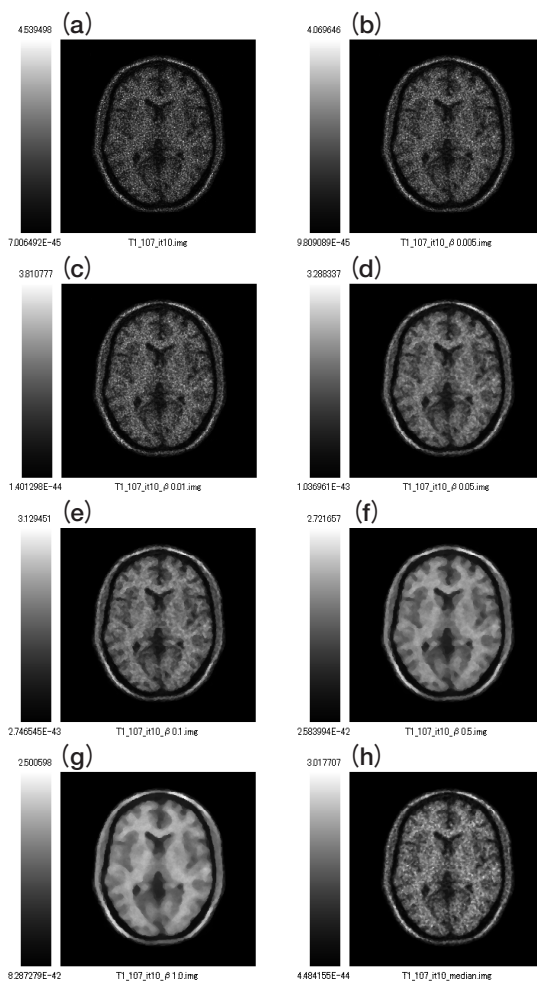


図 16. T1 強調画像の MRP-EM 法による再構成画像 (雑音を含む場合)

(a) 反復 10 回の OS-EM、(b) MRP-EM ( $\beta = 0.005$ )、  
 (c) MRP-EM ( $\beta = 0.01$ )、(d) MRP-EM ( $\beta = 0.05$ )、  
 (e) MRP-EM ( $\beta = 0.1$ )、(f) MRP-EM ( $\beta = 0.5$ )、  
 (g) MRP-EM ( $\beta = 1.0$ )、  
 (h) OS-EM 再構成画像をメディアンフィルタ処理。  
 MRP-EM の反復は OS-EM と同じく 10 回、投影データの総和を  $1 \times 10^7$  としている。

ダウンロードされた論文は私的利用のみが許諾されています。公衆への再配布については下記をご覧ください。

### 複写をご希望の方へ

断層映像研究会は、本誌掲載著作物の複写に関する権利を一般社団法人学術著作権協会に委託しております。

本誌に掲載された著作物の複写をご希望の方は、(社)学術著作権協会より許諾を受けて下さい。但し、企業等法人による社内利用目的の複写については、当該企業等法人が社団法人日本複写権センター（(社)学術著作権協会が社内利用目的複写に関する権利を再委託している団体）と包括複写許諾契約を締結している場合にあっては、その必要はございません（社外頒布目的の複写については、許諾が必要です）。

権利委託先 一般社団法人学術著作権協会

〒107-0052 東京都港区赤坂 9-6-41 乃木坂ビル 3F FAX：03-3475-5619 E-mail：info@jaacc.jp

複写以外の許諾（著作物の引用、転載、翻訳等）に関しては、(社)学術著作権協会に委託致しておりません。

直接、断層映像研究会へお問い合わせください

Reprographic Reproduction outside Japan

One of the following procedures is required to copy this work.

1. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has concluded a bilateral agreement with an RRO (Reproduction Rights Organisation), please apply for the license to the RRO.

Please visit the following URL for the countries and regions in which JAACC has concluded bilateral agreements.

<http://www.jaacc.org/>

2. If you apply for license for copying in a country or region in which JAACC has no bilateral agreement, please apply for the license to JAACC.

For the license for citation, reprint, and/or translation, etc., please contact the right holder directly.

JAACC (Japan Academic Association for Copyright Clearance) is an official member RRO of the IFRRO (International Federation of Reproduction Rights Organisations).

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)

Address 9-6-41 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

E-mail info@jaacc.jp Fax: +81-33475-5619